

А. А. Логунов

Анри Пуанкаре и ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



НАУКА



**Анри Пуанкаре
(1854–1912)**

УДК 501
ББК 22.31
Л 69

Логунов А.А.

Анри Пуанкаре и теория относительности / А.А. Логунов. – М.: Наука, 2004. 256 с.

ISBN 5-02-032855-3

В книге излагаются представления А. Пуанкаре и Г. Минковского, согласно которым суть и главное содержание теории относительности заключаются в том, что пространство и время образуют единый четырехмерный континуум событий с псевдоевклидовой геометрией. Именно в этом четырехмерном пространстве протекают все физические процессы. В книге даны комментарии по данной теме к работам и высказываниям: Л. де Бройля, Г. Вейля, В.Л. Гинзбурга, С. Голдберга, П. Дирака, А. Зоммерфельда, П. Ланжевена, Г. Лоренца, Л.И. Мандельштама, Г. Минковского, А. Пайса, В. Паули, М. Планка, А. Эйнштейна. В книге также показывается, что специальная теория относительности создана не только А. Эйнштейном, но в значительно большей степени А. Пуанкаре.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики.

Научное издание

Логунов Анатолий Алексеевич

АНРИ ПУАНКАРЕ

И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Зав. редакцией *Г.И. Чертова*. Редактор *Л.С. Чибисенков*

Художник *Т.В. Болотина*. Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в ГНЦ "Институт физики высоких энергий" *Г.М. Александровым*

Подписано к печати 01.03.2004. Формат 60 × 84¹/₁₆. Гарнитура Таймс

Печать офсетная. Усл.печ.л. 14,9+0,1 вкл. Усл.кр.-отт. 15,5. Уч.-изд.л. 10,7

Тираж 3000 экз. Тип. зак. 9618 Заказное

Издательство "Наука", 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

E-mail: secret@naukaran.ru Internet: www.naukaran.ru

ППП "Типография "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-02-032855-3

© Логунов А.А., 2004

© Издательство "Наука",
(оформление), 2004

*Посвящается 150-летию со дня рождения
Анри Пуанкаре – величайшего математика,
механика, физика-теоретика*

Предисловие

Специальная теория относительности “возникла в результате совместных усилий группы великих исследователей – Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского” (Макс Борн).

“И Эйнштейн, и Пуанкаре опирались на подготовительные работы Г.А. Лоренца, весьма близко подошедшего к окончательному результату, но не сумевшего сделать последний решающий шаг. В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл гармонии математического метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта” (В. Паули, 1955 г.).

А. Пуанкаре, опираясь на принцип относительности, который он сформулировал для всех физических явлений, и работу Лоренца, открыл и сформулировал все то, что составляет суть специальной теории относительности. А. Эйнштейн шел к теории относительности, исходя из принципа относительности, ранее сформулированного А. Пуанкаре. При этом он опирался также на идеи А. Пуанкаре по определению одновременности событий в разных точках пространства с помощью светового сигнала. Именно поэтому он и ввел дополнительный постулат – постоянство скорости света. В книге дается сравнение статьи А. Эйнштейна 1905 г. со статьями А. Пуанкаре и выясняется то **новое**, что внес каждый из них. Г. Минковский, несколько позже, развил подход Пуанкаре. Поскольку подход Пуанкаре более общий и глубокий, наше изложение точно следует Пуанкаре.

Согласно Пуанкаре и Минковскому суть специальной теории относительности состоит в следующем: **специальная теория относительности – это псевдоевклидова геометрия пространства-времени. Именно в таком пространстве-времени протекают все физические процессы.** Следствиями этого постулата являются: законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения; наличие инерциальных систем отсчета; принцип относительности для всех физических явлений; преобразования Лоренца; постоянство скорости света в галилеевых координатах инерциальной системы; замедление времени; сокращение Лоренца; возможность использования неинерциальных систем отсчета; парадокс часов; прецессия Томаса; эффект Саньяка и т. д. На основе этого постулата и квантовых представлений получен ряд фундаментальных следствий и построена квантовая теория поля. Неизменность (форминвариантность) физических уравнений во всех инерциальных системах отсчета означает, что **физические процессы, протекающие в этих системах при одинаковых условиях, тождественны.** Именно поэтому все **естественные эталоны** во всех инерциальных системах отсчета **одинаковы.**

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН профессору С.С. Герштейну, профессорам В.А. Петрову, Н.Е. Тюрину, Ю.М. Адо, старшему научному сотруднику А.П. Самохину, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, а также Г.М. Александрову за большую работу по подготовке рукописи к печати и составление именного и предметного указателей.

*А.А. Логунов
январь 2004 г.*

§ 1. Геометрия Евклида

В третьем веке до нашей эры, подводя итоги предшествующему развитию древнегреческой математики, **Евклид опубликовал трактат по математике “Начала”**. Именно в этом труде была сформулирована геометрия нашего трехмерного пространства – евклидова геометрия.

Это было важнейшим шагом в развитии как математики, так и физики. Ведь геометрия родилась на основе наблюдательных данных и практического опыта, т.е. возникла путем изучения природы. Но поскольку все явления природы происходят в пространстве и во времени, то значение геометрии в физике трудно переоценить, более того, геометрия – часть физики.

На современном языке математики суть евклидовой геометрии определяется теоремой Пифагора. Квадрат расстояния какой-либо точки с декартовыми координатами x, y, z от начала координат согласно теореме Пифагора определяется формулой

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad (1.1)$$

или в дифференциальной форме квадрат расстояния между бесконечно близкими точками равен

$$(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (1.2)$$

Здесь dx, dy, dz – дифференциалы декартовых координат. Обычно теорему Пифагора доказывают, исходя из аксиом Евклида, но оказывается, что ее можно принять как определение евклидовой геометрии. Трехмерное пространство, определяемое геометрией Евклида, обладает свойством однородности и изотропности. Это означает, что в таком пространстве нет выделенных точек и выделенных направлений. Совершая преобразования координат от одной декартовой системы x, y, z к другой x', y', z' , мы получим

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (1.3)$$

Это означает, что квадрат расстояния ℓ^2 является инвариантом, тогда как проекции на оси координат таковыми не являются. Это очевидное обстоятельство мы специально отмечаем, поскольку в дальнейшем будет видно, что такая ситуация будет иметь место и для четырехмерного пространства-времени, а следовательно, в зависимости от выбора системы координат в пространстве-времени проекции на пространственные и временную оси будут относительными. Отсюда и возникает относительность времени и длины. Но об этом позднее.

Геометрия Евклида, как составная часть, вошла в механику Ньютона. Представление о геометрии Евклида как о единственной и неизменной сохранялось около двух тысяч лет, несмотря на интенсивное развитие математики, механики и физики.

Только в начале 19 в. русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским был осуществлен революционный шаг – построена новая геометрия – геометрия Лобачевского. Несколько позднее к ней независимо пришел и венгерский математик Бolyai.

Четверть века спустя немецким математиком Риманом были построены другие – римановы геометрии. Возникло множество геометрических конструкций. С появлением новых геометрий встал и вопрос о геометрии нашего пространства. Какова она? Евклидова или неевклидова?

§ 2. Классическая механика Ньютона

Все явления природы происходят в пространстве и времени. Именно поэтому Исаак Ньютон в 17 в. при формулировке законов механики прежде всего определил эти понятия:

“Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным”.

“Абсолютное, истинное и математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью”.

В качестве геометрии трехмерного пространства Ньютон фактически пользовался геометрией Евклида, а декартову систему координат выбрал таким образом, чтобы ее начало было совмещено с центром Солнца, а три оси были направлены на удаленные звезды. Именно такую систему координат Ньютон и принимал как “неподвижную”. Введение абсолютного неподвижного пространства и абсолютного времени оказалось чрезвычайно плодотворным для того времени.

Первый закон механики, или закон инерции, Ньютон формулирует следующим образом:

“Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние”.

Закон инерции впервые открыл Галилей. Если в неподвижном пространстве выбрать декартову систему координат, то согласно закону инерции уединенное тело будет двигаться по траектории, определяемой уравнениями

$$x = v_x t, \quad y = v_y t, \quad z = v_z t. \quad (2.1)$$

Здесь v_x, v_y, v_z – постоянные проекции скорости, они могут иметь и нулевые значения.

А. Пуанкаре в книге “Наука и гипотеза” (1902 г.) сформулировал общий принцип:

“Ускорение тела зависит только от положения этого тела и соседних тел и от их скоростей. Математик сказал бы, что движения всех материальных частиц Вселенной определяются дифференциальными уравнениями второго порядка.

*Чтобы уяснить, что здесь мы имеем дело с естественным обобщением закона инерции, я позволю себе привести один воображаемый случай. Выше я указывал, что закон инерции не присущ нам *à priori*; другие законы были бы столь же хорошо, как и он, совместимы с принципом достаточного основания. Когда на тело не действует никакая сила, то мы могли бы вообразить, что неизменным является не скорость его, а его положение или его ускорение.*

Итак, представим себе на минуту, что один из этих двух гипотетических законов есть закон природы и заступает место нашего закона инерции. Каково было бы его естественное обобщение? Поразмыслив минуту, мы это уясним.

В первом случае пришлось бы допустить, что скорость тела зависит только от его положения и от положения соседних тел; во втором – что

изменение ускорения тела зависит только от положения этого тела и соседних тел, от их скоростей и от их ускорений.

Или, говоря математическим языком, дифференциальные уравнения движения были бы в первом случае первого порядка, во втором – третьего”.

Второй закон механики Ньютон сформулировал так:

“Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует”.

И, наконец, третий закон механики Ньютона:

“Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны”.

На основании этих законов механики, в случае центральных сил, для системы двух частиц имеем уравнения в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} M_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \\ M_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь M_1 и M_2 – массы первой и второй частиц, $\vec{r}_1$ – радиус-вектор первой частицы, $\vec{r}_2$ – радиус-вектор второй частицы. Функция F отражает характер действующих между телами сил.

В механике Ньютона в основном рассматриваются силы двух типов: тяготения и упругости.

Для сил тяготения Ньютона

$$F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = G \frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}, \quad (2.3)$$

G – гравитационная постоянная.

Для сил упругости – закон Гука

$$F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) = k|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, \quad (2.4)$$

k – коэффициент упругости.

Уравнения Ньютона записаны в векторной форме, а следовательно, они не зависят от выбора трехмерной системы координат. Как видно из уравнений (2.2), для замкнутой системы имеет место закон сохранения импульса.

Как было отмечено ранее, уравнения (2.2) справедливы, по замыслу Ньютона, только в неподвижной системе координат. Но если взять систему координат, движущуюся относительно неподвижной с постоянной скоростью $\vec{v}$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \quad (2.5)$$

то оказывается, что уравнения (2.2) не изменяются, т. е. **они остаются форминвариантными, а это означает, что никакие механические явления не позволят установить, находимся ли мы в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. В этом заключается принцип относительности, впервые открытый Галилеем. Преобразования (2.5) получили название галилеевых.**

Поскольку скорость $\vec{v}$ в (2.5) произвольна, то существует бесконечное множество систем координат, в которых уравнения сохраняют свою форму. Это означает, что в каждой из них имеет место закон инерции. Если в какой-либо из этих систем координат тело находится в покое или в состоянии равномерного и прямолинейного движения, то в любой другой системе координат, связанной с первой преобразованием (2.5), оно

также будет находится либо в состоянии равномерного прямолинейного движения, либо в состоянии покоя.

Все такие системы координат получили название инерциальных. Принцип относительности Галилея – это сохранение формы уравнений механики в любой инерциальной системе отсчета. Следует подчеркнуть, что в определении инерциальной системы отсчета лежит закон инерции Галилея. Согласно ему движение тела в отсутствии силы описывается линейными функциями от времени.

Но как определить инерциальную систему? На этот вопрос механика Ньютона не давала ответа. Тем не менее практически в качестве такой инерциальной системы выбиралась система координат с началом в центре Солнца, три оси которой направлялись на удаленные звезды.

В классической механике Ньютона время не зависит от выбора системы отсчета, иначе говоря, трехмерное пространство и время разделены, они не образуют единый четырехмерный континуум.

В 19 в. Эрнст Мах подверг критике взгляды Исаака Ньютона об абсолютном пространстве и абсолютном движении. Мах писал:

“Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое”.

И далее:

“Вместо того чтобы относить движущееся тело к пространству (к какой-нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к т е л а м мира, посредством которых только и можно о п р е д е л и т ь систему координат ... даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие

только д в у х масс, н е в о з м о ж н о отвлекаться от остального мира. ... Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно д р у г о г о тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение назвать а б с о л ю т н ы м, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения о т н о с и т е л ь н о неба неподвижных звезд”.

Поэтому Мах писал:

“... что нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством”.

Все это правильно, поскольку Ньютон не определил связь инерциальной системы с распределением материи, да на том уровне развития физики это было невозможно сделать. Впрочем, и Маху не удалось это осуществить. Но критика его была полезна, она привлекла внимание ученых к анализу основных физических понятий.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с полевыми представлениями, полезно остановиться на методах аналитической механики, которые были разработаны в течение 18 и 19 вв. Основная цель, которая тогда ставилась, состояла в том, чтобы найти для классической механики наиболее общую формулировку. Это направление исследований оказалось чрезвычайно важным, поскольку при этом возникли методы, которые позднее относительно легко были обобщены на системы с бесконечным числом степеней свободы. Именно так в классической механике был создан серьезный теоретический задел, который успешно был использован в 19 и 20 вв.

Жозеф Лагранж в “Аналитической механике”, опубликованной в 1788 г., получил свои знаменитые уравнения. Ниже мы приведем их вывод. Для системы из N материальных точек, движущихся в потенциальном поле U , уравнения Ньютона в инерциальной системе отсчета имеют вид

$$m_\sigma \frac{d\vec{v}_\sigma}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

В нашем случае сила $\vec{f}_\sigma$ равна

$$\vec{f}_\sigma = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\sigma}. \quad (2.7)$$

Для определения состояния механической системы в любой момент времени необходимо задать координаты всех материальных точек и их скорости в некоторый момент времени. Таким образом, состояние механической системы полностью определяется заданием координат и скоростей материальных точек. В декартовой системе координат уравнения (2.6) принимают форму

$$m_\sigma \frac{dv_\sigma^1}{dt} = f_\sigma^1, \quad m_\sigma \frac{dv_\sigma^2}{dt} = f_\sigma^2, \quad m_\sigma \frac{dv_\sigma^3}{dt} = f_\sigma^3. \quad (2.8)$$

Если перейти к другой инерциальной системе и выбрать в ней не декартовы координаты, то легко убедиться, что вид уравнений, записанных в новых координатах, будет существенно отличаться от уравнений (2.8). Лагранж нашел для механики Ньютона ковариантную формулировку уравнений движения, которые сохраняют свой вид при переходе к новым переменным.

Введем вместо координат $\vec{r}_\sigma$ новые **обобщенные координаты** q_λ , $\lambda = 1, 2, \dots, n$, здесь $n = 3N$. Положим, что

$$\vec{r}_\sigma = \vec{r}_\sigma(q_1, \dots, q_n, t). \quad (2.9)$$

Умножим каждое уравнение (2.6) скалярно на вектор

$$\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} \quad (2.10)$$

и сложим

$$m_\sigma \frac{d\vec{v}_\sigma}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Здесь по одинаковым индексам σ идет суммирование.

Левую часть уравнения (2.11) запишем в форме

$$\frac{d}{dt} \left[m_\sigma \vec{v}_\sigma \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} \right] - m_\sigma \vec{v}_\sigma \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} \right). \quad (2.12)$$

Поскольку

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d\vec{r}_\sigma}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial t}, \quad (2.13)$$

отсюда, дифференцируя (2.13) по $\dot{q}_\lambda$, получим равенство

$$\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial \vec{v}_\sigma}{\partial \dot{q}_\lambda}. \quad (2.14)$$

Дифференцируя (2.13) по q_ν , получим

$$\frac{\partial \vec{v}_\sigma}{\partial q_\nu} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu \partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial t \partial q_\nu}. \quad (2.15)$$

Но с другой стороны, имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu \partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial^2 \vec{r}_\sigma}{\partial t \partial q_\nu}. \quad (2.16)$$

Сравнивая (2.15) и (2.16), находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\sigma}{\partial q_\nu} \right) = \frac{\partial \vec{v}_\sigma}{\partial q_\nu}. \quad (2.17)$$

В формулах (2.13), (2.15) и (2.16) по одинаковым индексам λ идет суммирование.

Используя равенства (2.14) и (2.17), выражение (2.12) представим в форме

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\lambda} \left(\frac{m_\sigma v_\sigma^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_\lambda} \left(\frac{m_\sigma v_\sigma^2}{2} \right). \quad (2.18)$$

Поскольку (2.18) является левой частью уравнений (2.11), получаем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = - \frac{\partial U}{\partial q_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n. \quad (2.19)$$

Здесь T – кинетическая энергия системы материальных точек

$$T = \frac{m_\sigma v_\sigma^2}{2}, \quad (2.20)$$

по одинаковым индексам σ идет суммирование. Если ввести функцию Лагранжа L , равную

$$L = T - U, \quad (2.21)$$

то уравнения Лагранжа принимают форму

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

Состояние механической системы полностью определяется заданием обобщенных координат и скоростей. Форма уравнений Лагранжа (2.22) не зависит от выбора **обобщенных координат**. Хотя эти уравнения полностью эквивалентны системе уравнений (2.6), однако, такая форма уравнений классической механики оказалась чрезвычайно полезной, поскольку

она открыла возможность ее обобщения на явления, выходящие далеко за рамки классической механики.

Наиболее общая формулировка закона движения механической системы дается **принципом наименьшего действия** (или принципом стационарного действия). Действие составляется следующим образом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (2.23)$$

Интеграл (функционал) (2.23) зависит от изменения функций q и $\dot{q}$ в указанных пределах. Таким образом, эти функции являются функциональными аргументами интеграла (2.23). Принцип наименьшего действия записывается в форме

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0. \quad (2.24)$$

Уравнения движения механики получаются из (2.24) путем вариаций подынтегрального выражения

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (2.25)$$

Здесь δq и $\delta \dot{q}$ – бесконечно малое изменение вида функций. Вариация коммутативна с дифференцированием, а поэтому

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q). \quad (2.26)$$

Проводя во втором члене (2.25) интегрирование по частям, получим

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.27)$$

Поскольку вариации δq в точках t_1 и t_2 равны нулю, выражение (2.27) принимает вид

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.28)$$

Вариация δq внутри промежутка интегрирования произвольна, а поэтому в силу основной леммы вариационного исчисления отсюда следует **необходимое условие экстремума** в виде обращения в нуль вариационной производной

$$\frac{\delta L}{\delta q} \equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Такие уравнения при разработке вариационного исчисления были получены Леонардом Эйлером. При нашем выборе функции L в соответствии с (2.21) эти уравнения совпадают с уравнениями Лагранжа.

Из рассмотренного очевидно, что механическое движение, удовлетворяющее уравнениям Лагранжа, обеспечивает экстремальность интеграла (2.23), а следовательно действие имеет стационарное значение.

Использование функции Лагранжа для описания механической системы с конечным числом степеней свободы оказалось плодотворным и при описании физического поля, имеющего бесконечное число степеней свободы. В случае поля функция ψ , его описывающая, зависит не только от времени, но и от пространственных координат. Это означает, что вместо переменных $q_\sigma, \dot{q}_\sigma$ механической системы необходимо ввести переменные $\psi(x^\nu), \frac{\partial \psi}{\partial x^\lambda}$. Поле, таким образом, рассматривается как механическая система с бесконечным числом степеней свободы. Мы увидим далее (§ 10 и § 15), как используется

принцип стационарного действия в электродинамике и классической теории поля.

Очень важное значение в теоретической физике получила формулировка классической механики в рамках гамильтонова подхода. Введем в рассмотрение некоторую величину, определяемую выражением

$$H = p_\sigma \dot{q}_\sigma - L, \quad (2.30)$$

и называемую гамильтонианом. В (2.30) по одинаковым индексам σ идет суммирование. **Обобщенный импульс** определим следующим образом

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}. \quad (2.31)$$

Найдем дифференциал от выражения (2.30)

$$dH = p_\sigma d\dot{q}_\sigma + \dot{q}_\sigma dp_\sigma - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} dq_\sigma - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} d\dot{q}_\sigma - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.32)$$

Используя (2.31), получим

$$dH = \dot{q}_\sigma dp_\sigma - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} dq_\sigma - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.33)$$

С другой стороны, H является функцией независимых переменных q_σ , p_σ и t , а поэтому

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} dq_\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} dp_\sigma + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.34)$$

Сравнивая (2.33) и (2.34), получим

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Эти соотношения получены путем перехода от независимых переменных q_σ , $\dot{q}_\sigma$ и t к независимым переменным q_σ , p_σ и t .

Учитывая теперь в соотношениях (2.35) уравнения Лагранжа (2.22), приходим к уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}. \quad (2.36)$$

В том случае, когда гамильтониан H не зависит явно от времени

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (2.37)$$

имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} \dot{p}_\sigma. \quad (2.38)$$

Учитывая в этом выражении уравнения (2.36), получим

$$\frac{dH}{dt} = 0; \quad (2.39)$$

это означает, что гамильтониан не изменяется в течение движения.

Уравнения Гамильтона (2.36) мы получили, используя уравнения Лагранжа. Но они могут быть найдены непосредственно и с помощью принципа наименьшего действия (2.24), если в качестве L возьмем, согласно (2.30), выражение

$$L = p_\sigma \dot{q}_\sigma - H;$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_1}^{t_2} \delta p_\sigma \left(dq_\sigma - \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} dt \right) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_\sigma \left(dp_\sigma + \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} dt \right) + p_\sigma \delta q_\sigma \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку вариации δq_σ в точках t_1 и t_2 равны нулю, а внутри промежутка интегрирования вариации δq_σ , δp_σ произвольны, то в силу основной леммы вариационного исчисления получаем уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}, \quad \dot{p}_\sigma = -\frac{\partial H}{\partial q_\sigma}.$$

Если во время движения значение некоторой функции

$$f(q, p, t) = \text{const}, \quad (2.40)$$

т. е. остается постоянным, то она называется интегралом движения. Найдем для функции f уравнение движения.

Возьмем полную производную по времени от выражения (2.40)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \dot{p}_\sigma = 0. \quad (2.41)$$

Подставляя в (2.41) уравнения Гамильтона (2.36), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_\sigma} = 0. \quad (2.42)$$

Выражение

$$(f, g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} & \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \\ \frac{\partial g}{\partial q_\sigma} & \frac{\partial g}{\partial p_\sigma} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial f}{\partial p_\sigma} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_\sigma} \quad (2.43)$$

назвали скобкой Пуассона. В (2.43) по индексу σ идет суммирование.

На основании (2.43) уравнение (2.42) для функции f можно записать в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \quad (2.44)$$

Скобки Пуассона имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned}(f, g) &= -(g, f), \\ (f_1 + f_2, g) &= (f_1, g) + (f_2, g), \\ (f_1 f_2, g) &= f_1(f_2, g) + f_2(f_1, g),\end{aligned}\tag{2.45}$$

$$(f, (g, h)) + (g, (h, f)) + (h, (f, g)) \equiv 0.\tag{2.46}$$

Соотношение (2.46) называется **тождеством Якоби**. На основе (2.43) имеем

$$(f, q_\sigma) = -\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}, \quad (f, p_\sigma) = \frac{\partial f}{\partial q_\sigma}.\tag{2.47}$$

Отсюда находим

$$(q_\lambda, q_\sigma) = 0, \quad (p_\lambda, p_\sigma) = 0, \quad (q_\lambda, p_\sigma) = \delta_{\lambda\sigma}.\tag{2.48}$$

При построении квантовой механики, по аналогии с классическими скобками Пуассона (2.43), вводятся квантовые скобки Пуассона, которые также удовлетворяют всем условиям (2.45), (2.46). Использование соотношений (2.48) для квантовых скобок Пуассона позволило установить коммутационные соотношения между координатой и импульсом.

Открытие лагранжева и гамильтонова методов в классической механике позволило, в свое время, обобщить и распространить их на другие физические явления. Поиск различных представлений физической теории всегда крайне важен, поскольку на основе их может появиться возможность обобщения для описания новых физических явлений. В недрах сложившейся теории могут находиться формальные ростки будущей. Опыт классической и квантовой механики свидетельствует об этом.

§ 3. Электродинамика. Геометрия пространства-времени

Следуя открытиям Фарадея по электромагнетизму, Максвелл объединил магнитные, электрические и оптические явления и тем самым завершил построение электродинамики, написав свои знаменитые уравнения.

А. Пуанкаре в книге “Ценность науки” об исследовании Максвелла пишет следующее:

“В то время, когда Максвелл начал свои труды, законы электродинамики, принятые до него, объяснили все известные явления. Он приступил к работе не потому, чтобы какой-либо новый опыт ограничил значение этих законов. Но рассматривая их под новым углом зрения, Максвелл увидел, что уравнения становятся более симметричными, если в них ввести некоторый член, хотя, с другой стороны, этот член был слишком мал, чтобы вызвать явления, которые могли бы быть оценены прежними методами.

Известно, что априорные взгляды Максвелла ждали своего экспериментального подтверждения в течение двадцати лет; если вам больше нравится другое выражение, – Максвелл опередил опыт на двадцать лет. Как он достиг этого триумфа?

Это произошло благодаря тому, что Максвелл был глубоко проникнут чувством математической симметрии ...”

Согласно Максвеллу **нет иных токов, кроме замкнутых.** Этого он достиг введением дополнительного члена – **тока сме-**

щения, благодаря которому из новых уравнений следует закон сохранения электрического заряда.

Когда Максвелл формулировал уравнения электродинамики, он использовал евклидову геометрию трехмерного пространства и абсолютное время, которое одинаково для всех точек этого пространства. Руководствуясь глубоким чувством симметрии, он дополнил уравнения электродинамики таким образом, чтобы они, объясняя имеющиеся опытные факты, в то же время являлись уравнениями для электромагнитных волн. Он, конечно, не подозревал, что в уравнениях содержится информация о геометрии пространства-времени. Но его дополнение уравнений электродинамики оказалось настолько необходимым и точным, что оно однозначно привело А. Пуанкаре, опирающегося на работу Г. Лоренца, к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени и созданию теории относительности. Ниже мы кратко опишем, как это происходило.

В то же время мы покажем, что поразительное стремление некоторых авторов доказать, что А. Пуанкаре **“не сделал решающего шага”** в создании теории относительности, основано как на непонимании сути теории относительности, так и на поверхностном знании работ Пуанкаре. Все это далее будет показано в комментариях к таким суждениям. Именно поэтому я достаточно подробно останавливаюсь на результатах А. Пуанкаре, которые он впервые открыл и осветил светом сознания. При этом естественно возникает необходимость сравнивать содержание работы А. Эйнштейна 1905 г. как с результатами статей А. Пуанкаре [2; 3], так и с его ранними работами. При таком сравнении и становится ясным то **новое**, что внес каждый из них.

Как могло случиться, что выдающееся исследование двадцатого века – работы А. Пуанкаре [2; 3], всячески ис-

пользовалось, но в то же время само старательно предавалось забвению? Пора, хотя бы теперь, через сто лет, вернуть каждому свое. Это и наш долг.

Изучение свойств уравнений электродинамики показало, что они не сохраняют своего вида при преобразованиях Галилея (2.5), т. е. они не форминвариантны относительно преобразований Галилея. Отсюда следует вывод, что принцип относительности Галилея нарушается, а следовательно, возникает экспериментальная возможность отличить одну инерциальную систему от другой с помощью электромагнитных или оптических явлений. Однако проведенные различные эксперименты, в особенности опыты Майкельсона, показали, что и электромагнитными (оптическими) опытами не удастся различить, с точностью до $(v/c)^2$, находитесь ли вы в состоянии покоя или в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Г. Лоренц нашел объяснение результатам этих опытов, как отмечал А. Пуанкаре, **“только путем нагромождения гипотез”**.

В книге А. Пуанкаре “Наука и гипотеза”, опубликованной в России в 1904 г., отмечалось:

“Теперь я позволю себе сделать отступление, чтобы объяснить, почему я, вопреки Лоренцу, не думаю, что когда-нибудь более точные наблюдения могут обнаружить что-либо иное, кроме относительных перемещений материальных тел. Были произведены опыты, которые должны были бы открыть члены первого порядка. Результат был отрицательный; могло ли это быть делом случая? Этого никто не мог допустить; стали искать общее объяснение, и Лоренц нашел его: он показал, что члены первого порядка взаимно уничтожаются. Это не имело места для членов второго поряд-

ка. Тогда были произведены более точные опыты, которые снова дали отрицательный результат. Это опять не могло произойти случайно, – требовалось объяснение, которое и было дано. За объяснением дело никогда не станет: гипотезы представляют собой фонд, не подлежащий истощению.

Это не все: кто не заметит, что здесь случайность играет еще значительную роль? Разве не случайным является то странное совпадение, благодаря которому известное обстоятельство явилось как раз вовремя, чтобы уничтожить члены первого порядка, а другое, совершенно различное, взяло на себя труд уничтожить члены второго порядка? Нет, следует найти одно и то же объяснение для обоих случаев, и тогда естественно явится мысль, что то же будет иметь место равным образом и для членов высших порядков и что их взаимное уничтожение будет носить характер абсолютной точности”.

На основании опытных фактов Анри Пуанкаре в 1904 г. обобщил принцип относительности Галилея на все явления природы. Он писал [1]:

“Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет”.

Именно этот принцип и явился ключевым для последующего развития как электродинамики, так и теории относительно-

сти. Его можно сформулировать следующим образом. **Принцип относительности – это сохранение формы всех физических уравнений в любой инерциальной системе отсчета.**

Но поскольку в этой формулировке используется понятие *инерциальной системы отсчета*, то это означает, что физический закон инерции Галилея уже заложен в эту формулировку принципа относительности. В этом и есть отличие данной формулировки от формулировок Пуанкаре и Эйнштейна.

Объявляя этот принцип, Пуанкаре точно знал, что из него следует невозможность **абсолютного движения**, поскольку **все инерциальные системы отсчета равноправны**. Отсюда следует, что принцип относительности Пуанкаре не требует отрицания **эфира** вообще, он только лишает его связи с какой-либо системой отсчета. Иначе говоря, он устраняет **эфир** в понимании Лоренца. Само понятие **эфира** Пуанкаре не исключает, поскольку трудно представить себе большую нелепость, чем пустое пространство. Поэтому слово **эфир**, которое встречается в статьях Пуанкаре даже после формулировки им принципа относительности, имеет другой смысл, отличный от **эфира** Лоренца. Именно такой **эфир** и должен удовлетворять принципу относительности. К мысли об эфире пришел в 1920 г. и А. Эйнштейн.

В наше время такую роль выполняет физический вакуум. Именно все это некоторые физики (не говоря уже о философах и историках физики) до сих пор не понимают и ошибочно приписывают А. Пуанкаре, что якобы он понимал принцип относительности как невозможность обнаружить прямолинейное равномерное движение относительно эфира. Хотя, как вы можете увидеть, в самой формулировке принципа относительности нет слова “эфир”.

Необходимо различать **принцип относительности Галилея** и **преобразования Галилея**. Если принцип относительности Галилея Пуанкаре распространил, без изменения его

физической сущности, на все физические явления, то преобразования Галилея сохранили свое значение только когда скорости малы по сравнению со скоростью света.

В работе [3], применяя этот принцип относительности к электродинамическим явлениям, А. Пуанкаре писал:

“Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение Земли представляет, по-видимому, общий закон природы; мы естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем постулатом относительности, и принять без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержден или опровергнут более точными измерениями, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены”.

Г. Лоренц, после критических замечаний Пуанкаре, в 1904 г. сделал важнейший шаг, вновь попытавшись записать уравнения электродинамики в движущейся системе отсчета и показав, что **волновое уравнение электродинамики** остается **неизменным** (форминвариантным) при следующих преобразованиях координат и времени:

$$X' = \gamma(X - vT), \quad T' = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2}X\right), \quad Y' = Y, \quad Z' = Z, \quad (3.1)$$

время T' Лоренц назвал **измененным местным временем**; в отличие от ранее введенного (1895 г.) **местного времени** $\tau = T'/\gamma$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.2)$$

где c – электродинамическая постоянная.

А. Пуанкаре назвал эти преобразования *преобразованиями Лоренца*. Преобразования Лоренца, как это очевидно из (3.1), относятся к двум инерциальным системам отсчета. Но Г. Лоренц не установил принципа относительности для электромагнитных явлений, поскольку ему не удалось показать форминвариантность при этих преобразованиях всех уравнений Максвелла-Лоренца.

Из формул (3.1) следует, что независимость волнового уравнения от прямолинейного равномерного движения системы отсчета достигается только благодаря согласованному изменению координат и времени. Отсюда естественно возникает вывод, что в каждой инерциальной системе отсчета необходимо ввести свое физическое время.

Об этом А. Эйнштейн в 1907 г. писал:

«Однако неожиданно оказалось, что необходимо лишь достаточно точно сформулировать понятие времени, чтобы обойти только что изложенную трудность. Следовало лишь понять, что введенную Г.А. Лоренцем вспомогательную величину, названную им “местным временем”, на самом деле следует определить как “время”. С таким определением времени основные уравнения теории Лоренца будут удовлетворять принципу относительности ...»

Или, более точно, вместо **истинного времени** возникло **измененное местное время** Лоренца, свое для каждой инерциальной системы отсчета.

Но Г. Лоренц этого не увидел, в 1914 г. он писал об этом в подробной статье “Две статьи Анри Пуанкаре о математической физике”:

“Эти соображения, опубликованные мною в 1904 г., побудили Пуанкаре написать свою статью о динамике электрона, в которой он дал мое

имя преобразованию, о котором я только что говорил. По этому поводу должен заметить, что подобное преобразование имелось уже в одной статье Фогта, опубликованной в 1887 г., из которой я не извлек все возможное. В самом деле, для некоторых физических величин, встречающихся в формулах, я не указал наиболее подходящего преобразования. Это было сделано Пуанкаре, а затем Эйнштейном и Минковским. ... я не подумал о прямом пути, ведущем к ним, ибо полагал, что между системами x, y, z, t и x', y', z', t' имеется существенная разница. В одной использованы – таков был ход моих рассуждений – оси координат, имеющие определенное положение в эфире, и то, что можно было назвать **истинное время**; в другой системе, наоборот, мы имеем дело просто со вспомогательными величинами, введенными лишь с помощью математического ухищрения. В частности, переменную t' нельзя было бы назвать **временем** в том же смысле, как переменную t . При таком ходе идей я не думал описывать явления в системе x', y', z', t' **точно таким же образом**, как в системе x, y, z, t ... Позже я увидел из статьи Пуанкаре, что, действуя более систематически, я мог бы достигнуть еще большего упрощения. Не заметив этого, я не смог достигнуть полной инвариантности уравнений; мои формулы оставались загроможденными лишними членами, которые должны были бы исчезнуть. Эти члены были слишком малы, чтобы оказать заметное влияние на явления, и этим я мог объяснить обнаруженную наблюдениями независимость их от движения Земли, но я не

установил принципа относительности как строгую и универсальную истину. Напротив, Пуанкаре получил полную инвариантность уравнений электродинамики и сформулировал **постулат относительности** – термин, впервые введенный им. ... Добавим, что, исправляя, таким образом, недостатки моей работы, он никогда в них меня не упрекнул.

Я не могу здесь привести все прекрасные результаты, полученные Пуанкаре. Все же подчеркнем некоторые из них. Прежде всего, он не ограничился показом того, что релятивистские преобразования оставляют неизменной форму электромагнитных уравнений. Он объясняет успех постановок тем, что эти уравнения могут быть представлены в форме принципа наименьшего действия и что фундаментальное уравнение, выражающее этот принцип, а также операции, с помощью которых выводятся уравнения поля, одинаковы в системах x, y, z, t и x', y', z', t' ... В этой последней части статьи встречаются некоторые новые понятия; их я должен отметить особо. Пуанкаре замечает, например, что при рассмотрении $x, y, z, t\sqrt{-1}$ как координат точки в четырехмерном пространстве релятивистские преобразования сводятся к вращениям в этом пространстве. Ему также пришла мысль добавить к трем компонентам X, Y, Z силы величину

$$T = X\xi + Y\eta + Z\zeta,$$

которая представляет собой не что иное, как работу силы в единицу времени, и которую можно в некотором роде рассматривать как четвертую

компоненту силы. Когда речь идет о силе, действующей на единицу объема тела, релятивистские преобразования меняют величины $X, Y, Z, T\sqrt{-1}$ таким образом, как величины $x, y, z, t\sqrt{-1}$. Напоминаю об этих идеях Пуанкаре потому, что они близки к тем методам, которыми пользовались позже Минковский и другие ученые для облегчения математических действий, встречающихся в теории относительности."

Г. Лоренц, как мы видим, изучая статью Пуанкаре, увидел и принял, что **можно описывать явления в системе x', y', z', t' точно таким же образом, как в системе x, y, z, t** и что все это находится в точном соответствии с принципом относительности, сформулированным Пуанкаре. Отсюда следует, что **физические явления тождественны**, если они происходят при одинаковых условиях в инерциальных системах отсчета (x, y, z, t) и (x', y', z', t') , движущихся одна относительно другой со скоростью v . Все это явилось прямым следствием **неизменности физических уравнений** при преобразованиях Лоренца, образующих вместе с пространственными вращениями группу. Именно все это также содержится в статьях Пуанкаре [2; 3].

Г. Лоренц в 1915 г. в новом издании книги "Теория электронов" в примечании под номером 72* пишет:

"Главная причина моей неудачи заключалась в том, что я всегда придерживался мысли, что только переменную t можно принимать за истинное время и что мое местное время t' должно рассматриваться не более как вспомогательная математическая величина. В теории Эйнштейна, напротив, t' играет ту же роль, что и t ; если мы хотим

описывать явления в зависимости от x', y', z', t' , мы должны оперировать с этими переменными совершенно таким же образом, как мы оперировали бы с x, y, z, t ”.

Сравните это высказывание с подробным анализом статьи А. Пуанкаре, сделанным Лоренцем в 1914 г.

Далее он приводит в этом примечании вывод формул сложения скоростей, точно в том же виде, как это сделано в работе [3] Пуанкаре. В примечании 75* он рассматривает преобразование сил, использует инвариант (3.22) так же, как это сделано Пуанкаре. Работа Пуанкаре цитируется только в связи с частным вопросом. Удивительно, но Г. Лоренц, касаясь теории относительности, даже не ссылается на статьи А. Пуанкаре[2; 3]. Что же произошло с Г. Лоренцем в период после 1914 г.? Как это объяснить? Правда, следует отметить, что из-за войны статья Г. Лоренца, написанная в 1914 г., появилась в печати только в 1921 г. Но она появилась в том виде, в каком Лоренц написал ее в 1914 г. Этим он как бы еще подтвердил, что его мнение не изменилось. Но **все это в конечном счете не имеет никакого существенного значения, поскольку ведь мы сами сейчас можем, зная современное состояние теории, глубже и точнее разобраться в том, кто, что сделал и на каком уровне, путем сравнения статьи Эйнштейна 1905 г. со статьями А. Пуанкаре.**

Масштаб работ лучше виден на временном расстоянии. Воспоминания современников ценны нам как свидетельство того, как воспринимались новые представления физической общественностью того времени. Но в то же время отсюда можно почерпнуть сведения о научной этике тех или иных ученых, групповых интересах и может быть еще о чем-нибудь, совсем неизвестном для нас.

Необходимо отметить, что в работе 1904 г. Лоренц при выполнении своих преобразований допустил ошибку, и из-за нее

уравнения Максвелла-Лоренца в движущейся системе отсчета оказались отличными от уравнений электродинамики в неподвижной системе отсчета, они были загромождены лишними членами. Однако Лоренца это не насторожило. Ошибку он мог бы легко обнаружить, если бы ему не был чужд принцип относительности. Ведь именно принцип относительности требовал неизменности уравнений в обеих системах отсчета. Однако, в соответствии с общим убеждением он выделял одну систему отсчета, которая связана непосредственно с эфиром.

Теперь, следуя ранним работам А. Пуанкаре, остановимся на определении одновременности, синхронизации часов, находящихся в различных точках пространства, и выясним физический смысл местного времени, введенного Лоренцем. Пуанкаре в статье "Измерение времени", опубликованной в 1898 г. (см. сборник "Принцип относительности", составленный проф. А.А. Тяпкиным), подробно обсуждает вопрос об измерении времени. Эта статья особо отмечалась в книге Пуанкаре "Наука и гипотеза", а поэтому вполне была доступна любопытному читателю. В ней, в частности, говорилось:

"Но перейдем к примерам менее искусственным; чтобы дать отчет в определении, которое неявно допускается учеными, посмотрим на их работу и поищем, на основании каких правил они определяют одновременность ...

Когда астроном говорит мне, что такое-то звездное явление, видимое в его телескопе в настоящий момент, произошло, однако, пятьдесят лет тому назад, я пытаюсь понять, что он хочет сказать, и прежде всего спрашиваю у него, откуда он это знает, т.е. как он измерил скорость света.

Он начал с того, что принял скорость света постоянной и, в частности, одинаковой во всех на-

правлениях. Это и есть постулат, без которого не могло бы быть произведено никакое измерение этой скорости. Этот постулат никогда нельзя будет проверить непосредственно на опыте; последний мог бы его опровергнуть, если бы результаты различных измерений не согласовывались между собой. Мы должны считать себя счастливыми тем, что этого противоречия нет и что те небольшие расхождения, которые могут возникнуть, легко объяснимы.

Во всяком случае, этот постулат, согласующийся с законом достаточного основания, был принят всеми; для меня важно то, что он дает нам новое правило для отыскания одновременности (выделено мной. – А. Л.), совершенно отличное от того, которое мы изложили выше”.

Из этого постулата следует, что **величина скорости света не зависит от скорости источника света**. Это положение также является простым следствием электродинамики Максвелла. Приведенный выше постулат в соединении с **принципом относительности**, сформулированным А. Пуанкаре в 1904 г. для всех физических явлений и стали **исходными положениями** в работе А. Эйнштейна в 1905 г.

Лоренц рассматривал уравнения Максвелла-Лоренца в “неподвижной” системе отсчета, связанной с эфиром. Он считал координаты X, Y, Z абсолютными, а время T – истинным временем.

В системе координат, движущейся в направлении оси X со скоростью v относительно “неподвижной” системы отсчета, координаты по отношению к осям, движущимся вместе с системой, имеют значения

$$x = X - vT, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad (3.3)$$

а время в движущейся системе отсчета Лоренц назвал **местным временем** (1895 г.) и определил его следующим образом

$$\tau = T - \frac{v}{c^2}X. \quad (3.4)$$

Он ввел это время, чтобы в соответствии с опытными данными исключить в теории влияние движения Земли на оптические явления в первом порядке по v/c .

Это время, как отмечал он, **“введено с помощью математического ухищрения”**. Физический смысл местного времени был раскрыт А. Пуанкаре.

В статье **“Теория Лоренца и принцип равенства действия и противодействия”**, опубликованной в 1900 г., он писал о **местном времени τ** , дав ему следующее определение (перевод с французского В.А. Петрова):

*“Я предполагаю, что наблюдатели, размещенные в различных точках, сверяют свои часы с помощью световых сигналов; что они поправляют эти сигналы на время передачи, но не зная относительного движения, в котором они находятся и, следовательно, считая, что сигналы распространяются одинаково быстро в обоих направлениях, они ограничиваются ведением наблюдений, отправляя сигналы из А в В и потом – из В в А. **Местное время τ** есть время, отмеченное таким образом регулируемы́ми часами. Тогда, если c – скорость света, а v – скорость перемещения Земли, которую я полагаю параллельной оси положительных X , будем иметь:*

$$\tau = T - \frac{v}{c^2}X \text{ ”}. \quad (3.5)$$

Учитывая (3.3) в (3.5), получим

$$\tau = T \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} x. \quad (3.6)$$

Скорость света в “неподвижной” системе отсчета равна c . В движущейся системе отсчета в переменных x, T она будет равна вдоль линии, параллельной оси X :

$$c - v \quad (3.7)$$

в положительном, и

$$c + v \quad (3.8)$$

– в отрицательном направлении.

В этом легко убедиться, если вспомнить, что скорость света в “неподвижной” системе отсчета во всех направлениях равна c , т.е.

$$c^2 = \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dT} \right)^2. \quad (\lambda)$$

В движущейся системе отсчета ($x = X - vT$) в переменных x, T это выражение принимает вид

$$c^2 = \left(\frac{dx}{dT} + v \right)^2 + \left(\frac{dY}{dT} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dT} \right)^2.$$

Отсюда очевидно, что в движущейся системе отсчета координатная скорость светового сигнала $\frac{dx}{dT}$ вдоль линии, параллельной оси X , равна

$$\frac{dx}{dT} = c - v$$

в положительном направлении, и

$$\frac{dx}{dT} = c + v$$

– в отрицательном.

Координатная скорость света в движущейся системе отсчета в направлении оси Y или Z равна величине

$$\sqrt{c^2 - v^2}.$$

Заметим, что если бы мы использовали преобразования Лоренца обратные к (3.1), то учитывая тождество

$$c^2 \gamma^2 \left(dT' + \frac{v}{c^2} dX' \right)^2 - \gamma^2 (dX' + v dT')^2 = c^2 (dT')^2 - (dX')^2,$$

мы получили бы из (λ) выражение

$$c^2 = \left(\frac{dX'}{dT'} \right)^2 + \left(\frac{dY'}{dT'} \right)^2 + \left(\frac{dZ'}{dT'} \right)^2, \quad (\rho)$$

которое свидетельствует о том, что скорость света и в движущейся системе отсчета во всех направлениях равна c . Отметим также, что уравнение светового конуса остается неизменным, если правую часть преобразований Лоренца (3.1) умножить на произвольную функцию $\phi(x)$. Уравнение светового конуса сохраняется неизменным при конформных преобразованиях.

Следуя Пуанкаре, осуществим синхронизацию часов в движущейся системе отсчета с помощью **местного времени** Лоренца. Пусть из точки A с координатами $(0, 0, 0)$ световой сигнал вышел в момент времени τ_a :

$$\tau_a = T \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (3.9)$$

Этот сигнал придет в точку B с координатами $(x, 0, 0)$ в момент времени τ_b

$$\tau_b = \left(T + \frac{x}{c - v} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} x = \tau_a + \frac{x}{c}. \quad (3.10)$$

Мы здесь учли время передачи сигнала из A в B . В точке B сигнал отразился и пришел в точку A в момент времени τ'_a

$$\tau'_a = \left(T + \frac{x}{c-v} + \frac{x}{c+v} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \tau_b + \frac{x}{c}. \quad (3.11)$$

На основании (3.9), (3.11) и (3.10) имеем

$$\frac{\tau_a + \tau'_a}{2} = \tau_b. \quad (3.12)$$

Так вводится определение одновременности, которое позднее использовал А. Эйнштейн для вывода преобразований Лоренца. Мы убедились, что “местное время” Лоренца (3.6) удовлетворяет условию (3.12). Эйнштейн, используя (3.12) как исходное уравнение для определения времени в движущейся системе отсчета, пришел к тому же “местному времени” Лоренца (3.6), умноженному на произвольную функцию, зависящую только от скорости v . Из (3.10), (3.11) мы видим, что в движущейся вдоль оси X системе отсчета в **местном времени** τ световой сигнал имеет скорость c вдоль любого направления, параллельного оси X . Преобразования, обратные к (3.3) и (3.4), будут иметь следующий вид:

$$T = \frac{\tau + \frac{v}{c^2}x}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad X = \frac{x + v\tau}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad Y = y, \quad Z = z. \quad (3.13)$$

Так как скорость света в “неподвижной” системе отсчета равна c , в новых переменных τ, x, y, z находим из (3.1) и (3.13)

$$\gamma^2 \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 = \gamma^2 c^2. \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что для того чтобы скорость света в движущейся системе отсчета по любому направлению также была равна c , необходимо в преобразованиях (3.3) и (3.4) правые части для x и τ умножить на γ , а соответственно, в преобразованиях (3.13) правые части для T и X разделить на γ . Таким образом, из этого требования также возникают преобразования Лоренца.

Г. Лоренц в 1899 г. для объяснения опыта Майкельсона пользовался преобразованиями вида

$$X' = \gamma(X - vT), \quad Y' = Y, \quad Z' = Z, \quad T' = \gamma^2 \left(T - \frac{v}{c^2} X \right),$$

обратные к этим преобразованиям будут

$$X = \gamma X' + vT', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad T = T' + \frac{v}{c^2} \gamma X'.$$

Если бы Г. Лоренц выдвинул принцип относительности для всех физических явлений и потребовал в этой связи, чтобы сферическая волна имела одинаковый вид в нештрихованной и штрихованной системах отсчета, он пришел бы к преобразованиям Лоренца. Пусть в нештрихованной системе отсчета имеем

$$c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0,$$

в новых переменных согласно его формулам это выражение принимает вид

$$c^2 \left(T' + \frac{v}{c^2} \gamma X' \right)^2 - (\gamma X' + vT')^2 - Y'^2 - Z'^2 = 0,$$

после некоторых упрощений имеем

$$c^2 T'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - X'^2 - Y'^2 - Z'^2 = 0.$$

Мы видим, что для того чтобы сферическая волна имела в новых переменных такой же вид, как в старых переменных, необходимо изменить переменную T' , заменив ее новой переменной τ

$$\frac{1}{\gamma} T' = \tau.$$

Переходя к новой переменной, получим преобразования Лоренца

$$X' = \gamma(X - vT), \quad Y' = Y, \quad Z' = Z, \quad \tau = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2}X\right),$$

и обратные

$$X = \gamma(X' + v\tau), \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad T = \gamma\left(\tau + \frac{v}{c^2}X'\right).$$

Но этого Г. Лоренц не увидел в 1899 г. Эти преобразования он получил только в 1904 г., тогда же он вплотную подошел к теории относительности, но решающего шага не сделал. Преобразования Лоренца (3.1) были получены в 1900 г. Дж. Лармором. Однако, он также не выдвинул принципа относительности для всех физических явлений, а поэтому и не потребовал в соответствии с этим принципом форминвариантности уравнений Максвелла относительно этих преобразований. Тем самым и Лармор не сделал решающего шага к построению теории относительности.

Именно постоянство скорости света в любой инерциальной системе отсчета и положил А. Эйнштейн в основу своего подхода к электродинамике движущихся тел. Но оно обеспечивается не преобразованиями (3.3) и (3.4), а преобразованиями Лоренца.

А. Эйнштейн исходил из принципа относительности и принципа постоянства скорости света. Оба принципа он формулировал следующим образом:

“1. Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся”.

“2. Каждый луч света движется в «покоящейся» системе координат с определенной скоростью V , независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом”.

Следует отметить, что **принцип инерции Галилея** не содержится в этих двух принципах.

Следует особо подчеркнуть, что **принцип постоянства скорости света**, который А. Эйнштейн выдвинул как **второй независимый постулат**, на самом деле является частным следствием требования принципа относительности Пуанкаре, который он распространил на все физические явления. Чтобы убедиться в этом, достаточно только рассмотреть требование принципа относительности к элементарному процессу – распространению электромагнитной сферической волны. Позднее мы остановимся на этом.

В 1904 г. в статье “Настоящее и будущее математической физики” А. Пуанкаре формулирует принцип относительности для всех явлений природы, и в той же статье он вновь возвращается к идее **местного времени** Лоренца. Он пишет:

“...Вообразим двух наблюдателей, которые желают выверить свои часы при помощи световых сигналов; они обмениваются сигналами, но, зная, что свет распространяется не мгновенно, дают их, так сказать, перекрестным способом. Когда наблюдатель в пункте В принимает сигнал из пункта А, его часы должны показывать не то время,

которое показывали часы в пункте A в момент отправления сигнала, а время, увеличенное на некоторую постоянную, представляющую собой длительность передачи. Пусть, например, из пункта A посылается сигнал, когда часы в нем показывают время 0 , а в пункте B сигнал принимается, когда часы в нем показывают время t . Часы выверены, если запаздывание, равное t , представляет собой длительность передачи сигнала; чтобы это проверить, из пункта B посылается сигнал, когда часы в нем показывают время 0 ; в пункте A должны получить его, когда часы в нем показывают время t . Тогда показания часов согласованы. И действительно, они показывают одно и то же время в одно и то же физическое мгновение, но при условии, что оба пункта были неподвижны. В противном случае длительность передачи не будет одинакова в обоих направлениях: в случае, когда, например, пункт A движется навстречу оптическому возмущению, исходящему из B , и тогда, когда пункт B удаляется от возмущения, исходящего из A . Выверенные таким способом часы не будут показывать **истинное время** (время в неподвижной системе отсчета. — $A. Л.$), они будут показывать так называемое местное время: одни часы будут отставать от других. Но это несущественно, поскольку у нас нет никакого средства заметить это. Все явления, происходящие, например, в A , будут запаздывать, но запаздывать одинаково, и наблюдатель не заметит этого, потому что его часы отстают; таким образом, как это следует из принципа относительности, у него не

будет никакого средства узнать, находится ли он в покое или в абсолютном движении.

Этого, к сожалению, недостаточно, необходимы дополнительные гипотезы; надо допустить, что движущиеся тела испытывают однородное сокращение в направлении движения ...”

Такова была ситуация до работы Лоренца, которая также появилась в 1904 г. Здесь Лоренц выписывает преобразования (3.1), связывающие неподвижную систему отсчета с системой отсчета, движущейся со скоростью v относительно неподвижной, которые Пуанкаре назвал *преобразованиями Лоренца*. В этой работе Лоренц вместо **местного времени** (3.4) ввел время T' , равное

$$T' = \gamma \tau. \quad (3.15)$$

Лоренц назвал время T' **измененным местным временем**. Именно такое время и будет в любой инерциальной системе отсчета в галилеевых координатах. Оно не нарушает условие синхронизации (3.12).

Убедимся вслед за Лоренцем, что волновое уравнение действительно не меняет своей формы при преобразованиях Лоренца (3.1). Волновое уравнение электродинамики имеет вид:

$$\square \phi \equiv \left(\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0. \quad (3.16)$$

Здесь ϕ – скалярная функция в четырехмерном пространстве, изменяющаяся при координатно-временных преобразованиях по следующему правилу $\phi'(x') = \phi(x)$, c – **электродинамическая постоянная**, имеющая размерность скорости.

Установим форминвариантность оператора $\square$ относительно преобразований (3.1). Представим часть оператора $\square$ в форме

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (3.17)$$

Вычислим производные в новых координатах, используя формулы (3.1)

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{v}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} = -\gamma \left(\frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial x'} \right).$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(1 + \frac{v}{c} \right) \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial x'} \right), \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \right). \quad (3.19)$$

Подставляя эти выражения в (3.17), получим

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}. \quad (3.20)$$

Учитывая, что переменные y и z согласно (3.1) не изменяются, на основании (3.20) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\ & = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Это означает, что волновое уравнение (3.16) остается форминвариантным относительно преобразований Лоренца (3.1). Иначе говоря, оно одинаково в обеих инерциальных системах отсчета. Отсюда, в частности, следует, что скорость световой волны равна c как в “неподвижной” системе отсчета, так и в любой другой, движущейся относительно “неподвижной” со скоростью v .

Мы показали, что преобразования Лоренца оставляют оператор $\square$ неизменным, т. е. они сохраняют форминвариантность волнового уравнения (3.16). С другой стороны этот расчет можно считать обоснованием преобразований Лоренца, если исходить из требования форминвариантности оператора $\square$.

В электродинамике волновое уравнение, вне источника, имеет место как для скалярного потенциала φ , так и для векторного $\vec{A}$. В данном случае φ определен как скаляр относительно трехмерных координатных преобразований, а $\vec{A}$ – как вектор относительно тех же преобразований. Для форминвариантности волнового уравнения при преобразованиях Лоренца необходимо считать величины φ и $\vec{A}$ компонентами четырехмерного вектора $A^\nu = (\varphi, \vec{A})$

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

В 1905 г. Анри Пуанкаре [2; 3], опираясь на работу Г. Лоренца 1904 г., в которой были открыты преобразования Лоренца, и на принцип относительности, который он сформулировал в том же году для всех явлений природы, впервые установил неизменность уравнений Максвелла-Лоренца, уравнения движения заряженных частиц под действием силы Лоренца относительно преобразований Лоренца (3.1). Все это будет детально показано в параграфах 8 и 9.

А. Пуанкаре открыл, что эти преобразования вместе с пространственными вращениями образуют группу. Он

впервые ввел представление о четырехмерности ряда физических величин. Открытие этой группы в соединении с квантовыми представлениями заложило основы современной теоретической физики.

Пуанкаре установил, что скалярный и векторный потенциал $(\varphi, \vec{A})$, плотность заряда и ток $(\rho, \rho\vec{v})$, четырехскорость $(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c})$, работа в единицу времени и отнесенная к единице объема сила $(\vec{f}\frac{\vec{v}}{c}, \vec{f})$, а также четырехсила преобразуются таким же образом как величины $(ct, \vec{x})$. Наличие группы Лоренца означает, что во всех инерциальных системах в галилеевых координатах уравнения Максвелла-Лоренца остаются форминвариантными, т.е. принцип относительности выполняется. Отсюда непосредственно следует одинаковость описания явлений как в системе отсчета x, y, z, t , так и в системе x', y', z', t' , а следовательно, время t , как и другие переменные x, y, z , относительно. Таким образом, относительность времени есть прямое следствие наличия группы, которая сама возникла как следствие требования выполнения принципа относительности для электромагнитных явлений. Наличие группы привело к открытию геометрии пространства-времени.

А. Пуанкаре открыл ряд инвариантов группы и среди них фундаментальный инвариант

$$J = c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2, \quad (3.22)$$

который получен при использовании преобразований Лоренца. Он свидетельствует, что пространство и время образуют единый четырехмерный континуум событий с метрическими свойствами, определяемыми инвариантом (3.22). Открытое А. Пуанкаре четырехмерное пространство-время, определяемое инвариантом (3.22), впоследствии назвали **пространством Минковского**.

В этом и состоит суть специальной теории относительности. Именно поэтому она имеет отношение ко всем физическим явлениям. Пространство-время, определяемое инвариантом (3.22), и обусловило существование в природе физически равноправных инерциальных систем отсчета. Однако как и ранее в классической механике, осталось неясным, как инерциальные системы отсчета связаны с распределением материи во Вселенной. Из выражения (3.22) следует, что в любой инерциальной системе отсчета в галилеевых (декартовых) координатах заданная величина J остается неизменной (форминвариантной), тогда как проекции на оси изменяются. Таким образом, в зависимости от выбора инерциальной системы отсчета проекции X, Y, Z, T являются относительными величинами, тогда как величина J для любых данных X, Y, Z, T имеет абсолютное значение. Положительный интервал J может быть измерен часами, тогда как отрицательный – линейкой. В дифференциальной форме согласно (3.22) имеем

$$(d\sigma)^2 = c^2(dT)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2. \quad (3.23)$$

Величину $d\sigma$ называли интервалом.

Геометрию пространства-времени, т.е. пространства событий (пространства Минковского), с мерой (3.23) называли псевдоевклидовой геометрией.

Как видно из структуры инварианта J , записанного в ортогональных (галилеевых) координатах, всегда можно ввести единое время T для всех точек трехмерного пространства. Это означает, что трехмерное пространство данной инерциальной системы отсчета ортогонально линиям времени. Поскольку, как мы увидим ниже, инвариант J в другой инерциальной системе отсчета принимает вид (3.27), то отсюда следует, что в этой системе отсчета единое время будет уже другим, оно определяется переменной T' . Но одновременно с этим изме-

нится и длина. Таким образом, возможность введения одновременности для всех точек трехмерного пространства является прямым следствием псевдоевклидовой геометрии четырехмерного пространства событий.

Подводя итог всему вышесказанному, мы видим, что Г. Лоренц нашел преобразования (3.1), которые сохраняют форму волнового уравнения (3.16). Анри Пуанкаре, основываясь на принципе относительности для всех физических явлений, который он сформулировал в 1904 г., и на преобразованиях Лоренца, установил форминвариантность уравнений Максвелла-Лоренца и открыл псевдоевклидову геометрию пространства-времени, определяемую инвариантом (3.22) или (3.23).

Краткое изложение детальной статьи [3] было дано А. Пуанкаре в докладах Французской академии наук [2] и было опубликовано еще до того, как была направлена в печать работа Эйнштейна. Оно содержало точное и строгое решение проблемы электродинамики движущихся тел и в то же время распространение преобразований Лоренца на все силы природы, какого бы происхождения они ни были. В этой работе он открыл группу Лоренца, благодаря которой и возник целый ряд четырехмерных физических величин, преобразующихся как ct, x, y, z . В этой статье Пуанкаре уже не останавливается, как ранее, на процедуре определения понятия *одновременности* в разных точках пространства с помощью светового сигнала, поскольку он теперь все это воплощает, в соответствии с принципом относительности, в форминвариантность уравнений электродинамики относительно группы Лоренца. Наличие группы Лоренца автоматически обеспечивает синхронизацию часов в каждой инерциальной системе отсчета. Так в каждой инерциальной системе отсчета возникает свое физическое время – **измененное местное время** Лоренца. В статье [2] впервые появились релятивистские формулы сложения скоростей,

законы преобразования сил; **предсказано** существование **гравитационных волн**, распространяющихся со скоростью света.

Следует подчеркнуть, что наличие группы Лоренца и обеспечивало одинаковость описания физических явлений во всех инерциальных системах отсчета в полном соответствии с принципом относительности. Именно все это приводило к относительности времени и длины.

А. Пуанкаре открыл инвариант (3.22) на основании преобразований Лоренца (3.1). С другой стороны, используя инвариантность инварианта (3.22), легко найти сами преобразования Лоренца (3.1). Пусть в инерциальной системе в галилеевых координатах инвариант J имеет форму (3.22). Перейдем в другую инерциальную систему координат, положив

$$x = X - vT, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z; \quad (3.24)$$

тогда инвариант J примет вид

$$J = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) T^2 - 2xvT - x^2 - Y'^2 - Z'^2. \quad (3.25)$$

Отсюда имеем

$$J = c^2 \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} T - \frac{xv}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^2 - x^2 \left[1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2} \right] - Y'^2 - Z'^2. \quad (3.26)$$

Выражение (3.26) можно записать в форме

$$J = c^2 T'^2 - X'^2 - Y'^2 - Z'^2, \quad (3.27)$$

где

$$T' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} T - \frac{xv}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T - \frac{v}{c^2} X}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.28)$$

$$X' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.29)$$

Мы видим из выражения (3.27), что форминвариантность инварианта J обеспечивается преобразованиями Лоренца (3.28) и (3.29). При выводе преобразований Лоренца из выражения инварианта (3.22) мы воспользовались тем, что инвариант J может иметь произвольное вещественное значение. Именно это обстоятельство и позволило нам рассматривать величины T и X как независимые переменные, которые могут принимать любые вещественные значения. Если бы мы, следуя Эйнштейну, знали только одно значение J , равное нулю, то таким путем не смогли бы получить преобразования Лоренца общего вида, поскольку пространственные переменные были бы связаны с временной переменной.

В этом случае можно осуществить следующий **эвристический** подход. В галилеевых координатах “неподвижной” системы отсчета K , как следует из уравнений Максвелла-Лоренца, уравнение сферической электромагнитной волны с центром в начале координат имеет вид

$$c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0,$$

здесь c – электродинамическая постоянная.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' в галилеевых координатах, движущихся одна относительно другой со скоростью v вдоль оси X . Пусть в момент времени $T = 0$

их начала координат совпадают, и из их общего начала в этот момент времени испускается сферическая электромагнитная волна. Ее уравнение в системе K имеет вид

$$c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0.$$

Поскольку система отсчета K' движется со скоростью v , мы можем использовать преобразования Галилея

$$x = X - vT, \quad Y = Y', \quad Z = Z'$$

и верхнее уравнение сферической волны переписать в форме

$$c^2 T^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2xvT - x^2 - Y'^2 - Z'^2 = 0.$$

Требование принципа относительности, в данном случае, сводится к тому, чтобы в новой инерциальной системе отсчета K' электромагнитная волна была точно такой же сферической с центром в начале координат этой системы отсчета.

С этой целью предыдущее уравнение (так же, как это делали ранее) преобразуем к виду

$$c^2 T'^2 - X'^2 - Y'^2 - Z'^2 = 0.$$

Таким образом, мы находим преобразования Лоренца.

$$T' = \frac{T - \frac{v}{c^2}X}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad X' = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z,$$

но только на световом конусе.

Теперь самое важное. Будем считать величины T, X, Y, Z в полученных преобразованиях **независимыми**; подставляя

эти выражения в правую часть (3.27), мы видим, что они оставляют выражение

$$c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2,$$

благодаря линейности преобразований неизменным, т. е. мы приходим к фундаментальному инварианту J , а следовательно, и к псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Отсюда, в частности, следует, что скорость света как в системе K , так и в K' – одинакова и, следовательно, принцип постоянства скорости света является частным следствием принципа относительности. Именно все эти обстоятельства остались незамеченными А. Эйнштейном в его работе 1905 г. при выводе преобразований Лоренца.

Ранее мы показали, следуя Пуанкаре, что “местное время” Лоренца позволяет в движущейся системе отсчета осуществить синхронизацию часов, находящихся в разных точках пространства, с помощью светового сигнала. Именно выражение (3.12) и является условием синхронизации часов в движущейся системе отсчета. Оно вводит определение одновременности событий в разных точках пространства. Пуанкаре установил, что этому условию удовлетворяет “местное время” Лоренца.

Таким образом, определение одновременности в разных точках пространства с помощью светового сигнала, а также определение времени в движущейся системе отсчета с помощью светового сигнала, – все эти вопросы рассмотрены А. Пуанкаре в статьях 1898, 1900 и 1904 гг. Поэтому нет никаких оснований считать, что они впервые были рассмотрены А. Эйнштейном в 1905 г.

Но вот, например, что академик Л.И. Мандельштам написал в своих лекциях [8]:

“Таким образом, в выяснении того, что понятие одновременности есть такое же понятие ... ,

которое должно быть определено – в этом громадная заслуга Эйнштейна. Знали о пространстве, знали о времени, знали в течение многих сотен лет, и никому не приходило в голову, что это так”.

И вот что написал Г. Вейль:

“В физическом отношении мы можем теперь отбросить веру в объективное значение одновременности. Освобождение от этой догмы является великим теоретико-познавательным достижением Эйнштейна, имя которого должно стоять рядом с именем Коперника”.

Неужели Л.И. Мандельштам и Г. Вейль не читали статьи и книги Пуанкаре?

Академик В.Л. Гинзбург в книге “О физике и астрофизике” (М.: Наука, 1985) в статье “Как и кто создал СТО?”¹ написал:

“С другой стороны, в более ранних работах, в статьях и докладах Пуанкаре имеется ряд замечаний, звучащих почти пророчески. Речь идет и о необходимости определить понятие одновременности, и о возможности использовать для этой цели световые сигналы, и о принципе относительности. Но Пуанкаре не развил этих соображений и в своих работах 1905-1906 гг. следует за Лоренцем”.

Дадим некоторые комментарии к этому высказыванию.

Если быть точным, то следует сказать, что **Пуанкаре первым сформулировал принцип относительности для всех**

¹Все высказывания академика В.Л. Гинзбурга, которые далее приводятся, взяты из этой его статьи. – А.Л.

физических явлений природы. Он также, в статьях 1898, 1900 и 1904 гг. **определил понятие одновременности в разных точках пространства с помощью светового сигнала.** В работах Пуанкаре [2; 3] эти **положения** нашли адекватное воплощение на языке группы Лоренца, которая обеспечила выполнение как требования принципа относительности, так и введение своего **измененного местного времени** Лоренца в каждой инерциальной системе отсчета. Все это автоматически обеспечивало единую синхронизацию часов с помощью светового сигнала в каждой инерциальной системе отсчета. Именно поэтому **никакого дальнейшего развития этих положений** после работы Г. Лоренца 1904 г. уже не требовалось.

Необходимо было только ввести их в лоно теории. С помощью группы Лоренца, открытой А. Пуанкаре, это и было точно осуществлено в работах [2; 3]. Пуанкаре, как это ясно из статей [2; 3], не следует за Лоренцем, он, используя достижения Лоренца, развивает **свои идеи** и таким путем завершает создание теории относительности. Именно в работах [2; 3] он распространяет лоренц-инвариантность на все силы природы, в том числе и гравитационные; находит уравнения релятивистской механики; открывает фундаментальный инвариант

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

определяющий геометрию пространства-времени.

Подход А. Пуанкаре прозрачен и современен, хотя и осуществлен почти сто лет назад. Как все это можно не увидеть, читая статьи Пуанкаре [2; 3]?

А.Эйнштейн в 1905 г. в статье “К электродинамике движущихся тел” (§ 3) принял соотношение (3.12) в качестве исходного уравнения для нахождения функции τ . Но отсюда, естественно, нельзя получить ничего другого, кроме как “**местного времени**” Лоренца. Запишем полученное им выражение

в форме

$$\tau = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) T - \frac{v}{c^2} x \right],$$

где a – неизвестная функция, зависящая только от скорости v .

Отсюда видно, что это выражение отличается от “местного времени” Лоренца (3.6) только множителем, зависящим от скорости v , который не определяется условием (3.12). Странно, что А. Эйнштейн знает, что это “местное время” Лоренца, но не ссылается на автора. Такой подход у него встречается неоднократно.

Далее, для луча света, вышедшего в момент времени $\tau = 0$ в направлении возрастающих значений ξ , Эйнштейн пишет:

$$\xi = c\tau$$

или

$$\xi = \frac{ac}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) T - \frac{v}{c^2} x \right]. \quad (\beta)$$

Далее он находит

$$x = (c - v)T. \quad (\delta)$$

Подставляя это значение T в уравнение для ξ , Эйнштейн получает:

$$\xi = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{c^2}} x.$$

Поскольку, как в дальнейшем выясняется из статьи Эйнштейна, величина a имеет значение

$$a = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

то, учитывая это выражение, получим:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставляя вместо x его значение (3.3)

$$x = X - vT, \quad (\nu)$$

Эйнштейн получает для ξ выражение вида:

$$\xi = \frac{X - vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

которое он и рассматривает как преобразование Лоренца для ξ , **подразумевая, что X и T могут принимать произвольные значения.** Однако это не так. Он не учитывает, что согласно (δ) и (ν) имеет место равенство

$$X - vT = (c - v)T,$$

откуда следует, что

$$X = cT.$$

Таким образом, Эйнштейн получил для ξ преобразование Лоренца только для частного случая, когда $X = cT$:

$$\xi = X \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

В этом можно убедиться и непосредственно, если в формулу (β) для ξ подставить не значение T из формулы (δ) , как это

сделал Эйнштейн, а значение x из той же формулы. Тогда получим:

$$\xi = \frac{a}{1 + \frac{v}{c}} X, \quad X = cT.$$

Учитывая выражение для a , мы опять приходим к ранее найденной формуле

$$\xi = X \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}, \quad X = cT.$$

Но далее в статье А. Эйнштейн использует преобразования Лоренца общего вида без каких-либо комментариев. Эйнштейн не увидел, что принцип относительности в соединении с электродинамикой с необходимостью требует построения, в соответствии с группой Лоренца, четырехмерных физических величин и, как следствие, наличия инвариантов группы, которые свидетельствуют о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Именно поэтому ему, в частности, не удалось найти релятивистских уравнений механики, поскольку им не был установлен закон преобразования силы Лоренца и не было понято, что энергия и импульс частицы составляют единое целое и преобразуются при лоренцевых преобразованиях так же, как величины ct, x, y, z . Следует особо подчеркнуть, что в своей работе 1905 г. Эйнштейн, в отличие от Пуанкаре, не распространил преобразования Лоренца на все силы природы, например, гравитацию. Позднее он писал, что *“в рамках специальной теории относительности нет места для удовлетворительной теории тяготения”*. Однако, как показано в [5], это не так.

Принцип относительности для инерциальных систем, благодаря уравнениям Максвелла-Лоренца, привел Пуанкаре [3],

а затем Минковского [4] к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Именно этим мы обязаны Пуанкаре и Минковскому. Выступая в 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне, Г. Минковский отмечал [4]:

“Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность”.

Поэтому суть специальной теории относительности состоит в следующем (это постулат): **все физические процессы протекают в четырехмерном пространстве-времени $(ct, \vec{x})$, геометрия которого псевдоевклидова и определяется интервалом (3.23).**

Следствиями этого постулата являются: законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения; наличие инерциальных систем отсчета; принцип относительности для всех физических явлений; преобразования Лоренца; постоянство скорости света в галилеевых координатах инерциальной системы; замедление времени; сокращение Лоренца; возможность использования неинерциальных систем отсчета; парадокс часов; прецессия Томаса; эффект Саньяка и т. д. На основе этого постулата и квантовых представлений получен ряд фундаментальных следствий и построена квантовая теория поля.

К столетию теории относительности пора бы уже уяснить, что постоянство скорости света во всех инерциальных систе-

мах отсчета не является исходным положением теории относительности.

Таким образом, изучение электромагнитных явлений в соединении с принципом относительности Пуанкаре привело к объединению пространства и времени в единый четырехмерный континуум событий и позволило установить псевдоевклидову геометрию этого континуума. Такое четырехмерное пространство-время является однородным и изотропным.

Эти свойства пространства-времени обеспечивают выполнимость фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения для замкнутой физической системы. **Псевдоевклидова геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи, которые и делают ее универсальной.** Изучение различных форм материи, законов ее движения является в то же время и изучением пространства и времени. Хотя сама структура пространства-времени и открылась нам в результате изучения материи (электродинамики), иногда мы говорим о пространстве как об арене, на которой происходят те или иные явления. При этом мы не совершим ошибку, если будем помнить, что эта арена не существует сама по себе без материи. Иногда говорят, что пространство-время (пространство Минковского) задано априорно, поскольку его структура не изменяется под действием материи. Такая неизменность пространства Минковского возникает вследствие его **универсальности** для всех физических полей, а поэтому и создается впечатление, что оно существует как бы независимо от материи. По-видимому, из-за неясности для него сути специальной теории относительности и пришел А. Эйнштейн к выводу, что *“в рамках специальной теории относительности нет места для удовлетворительной теории тяготения”*.

В общей теории относительности Эйнштейна специальная теория относительности точно не выполняется, она рассма-

тривается как предельный случай. А. Эйнштейн в 1955 г. писал:

«Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить “инерциальную систему” (или “инерциальные системы”)».

Однако и в настоящее время нет ни одного экспериментального или наблюдательного факта, который свидетельствовал бы о нарушении специальной теории относительности. Именно поэтому ни в какой мере не оправдан отказ от ее точного соблюдения и при изучении гравитационных явлений. Тем более, что все известные гравитационные эффекты точно объясняются в рамках специальной теории относительности [5]. **Отказ от специальной теории относительности ведет к отказу от фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения.** Таким образом, приняв гипотезу, что все явления природы происходят в псевдоевклидовом пространстве-времени, мы тем самым соблюдаем все требования фундаментальных законов сохранения и подтверждаем **существование инерциальных систем отсчета.**

Пространственно-временной континуум, определяемый интервалом (3.23), можно записать и в произвольных координатах. **При переходе к произвольным координатам геометрия четырехмерного пространства-времени не изменяется.** Однако в произвольных координатах **трехмерное пространство уже не будет евклидовым.** Для упрощения записи вместо переменных T, X, Y, Z введем переменные X^ν , $\nu = 0, 1, 2, 3$, $X^0 = cT$. Совершим теперь переход от переменных X^ν к произвольным переменным x^ν с помощью преобразований

$$X^\nu = f^\nu(x^\sigma). \quad (3.30)$$

Эти преобразования в общем случае приводят к неинерциальной системе координат. Вычисляя дифференциалы

$$dX^\nu = \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \quad (3.31)$$

(здесь и далее по одинаковым индексам λ идет суммирование от 0 до 3) и подставляя их в (3.23), получим выражение для интервала в неинерциальной системе координат

$$(d\sigma)^2 = \gamma_{\mu\lambda}(x) dx^\mu dx^\lambda. \quad (3.32)$$

Здесь $\gamma_{\mu\lambda}(x)$ – метрический тензор четырехмерного пространства-времени, он равен

$$\gamma_{\mu\lambda}(x) = \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon^\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad \varepsilon^\nu = (1, -1, -1, -1). \quad (3.33)$$

Выражение (3.32) инвариантно относительно произвольных преобразований координат. Выражение (3.33) дает общий вид псевдоевклидовой метрики.

Отличие метрики вида (3.23) от метрики (3.32) обычно, в соответствии с идеями Эйнштейна, относят за счет наличия гравитационного поля. Но это неправильно. Никакого гравитационного поля в метрике вида (3.32) нет. Представления об ускоренных системах отсчета сыграли в размышлениях Эйнштейна над проблемой гравитации важную эвристическую роль. Они помогли ему прийти к идее описания гравитационного поля с помощью метрического тензора риманова пространства, именно поэтому Эйнштейн стремился сохранить их, хотя они и не имеют никакого отношения к гравитационному полю. Такие обстоятельства и помешали ему раскрыть суть специальной теории относительности. С формальной, математической точки зрения он высоко ценил исследование Минковского, но в глубокую физическую суть его работы он так

и не проник, хотя в статье речь шла о важнейшем в физике – **открытии псевдоевклидовой структуры пространства и времени.**

Специальную теорию относительности Эйнштейн связывал только с интервалом вида (3.23), относя (3.32) к общей теории относительности. К сожалению, такая точка зрения до сих пор бытует в учебниках и монографиях, излагающих теорию относительности.

Пусть в некоторой неинерциальной системе координат метрический тензор пространства имеет вид $\gamma_{\mu\lambda}(x)$. Тогда нетрудно показать, что существует бесконечное множество систем координат, в которых интервал (3.32) имеет вид

$$(d\sigma)^2 = \gamma_{\mu\lambda}(x') dx'^{\mu} dx'^{\lambda}. \quad (3.34)$$

Частным случаем таких преобразований являются преобразования Лоренца, которые связывают одну инерциальную систему с другой. Мы видим, что преобразования координат, которые оставляют метрику форминвариантной, приводят к тому, что физические явления, происходящие в таких системах координат при одинаковых условиях, никогда не могут позволить отличить одну систему координат от другой. Отсюда можно дать более общую формулировку **принципа относительности**, которая относится уже не только к **инерциальным системам** координат, но и к **неинерциальным** [6]:

“Какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возмож-

ностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся”.

Следует отметить, что в (3.33) метрический тензор $\gamma_{\mu\lambda}(x)$ зависит от координат, но тем не менее пространство остается псевдоевклидовым. Хотя это и очевидно, но об этом необходимо сказать, поскольку А. Эйнштейн даже в 1933 г. писал совсем противоположное [7]:

“В специальной теории относительности, как показал Г. Минковский, эта метрика была квазиевклидовой, т.е. квадрат «длины» ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат. Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то ds^2 остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции ($g_{\mu\nu}$) будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырёхмерное) пространство обладает римановой метрикой”.

Это, конечно, **неправильно**, поскольку преобразованиями координат (3.30) невозможно превратить псевдоевклидову геометрию в риманову. Такое высказывание А. Эйнштейна имело под собой глубокие физические корни. Эйнштейн был убежден, что псевдоевклидова метрика в произвольных координатах $\gamma_{\mu\lambda}(x)$ также описывает гравитационное поле. Эти представления, выдвинутые Эйнштейном, ограничили рамки применимости специальной теории относительности и в таком же виде вошли в учебники и монографии, что и затруднило понимание сути теории относительности.

Так например, академик Л.И. Мандельштам в своих лекциях по теории относительности [8] особо отмечал:

“Что происходит в действительности, как идут ускоренно движущиеся часы и почему их ход изменяется, на это специальная теория относительности ответить не может, ибо она вообще не занимается вопросом об ускоренно движущихся системах отсчета”.

Физические истоки такого ограниченного понимания специальной теории относительности идут от А. Эйнштейна. Приведем ряд его высказываний по поводу специальной теории относительности. В 1913 г. он писал [9]:

“В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования”.

В следующей статье того же года он пишет [10]:

“В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \sum_i dx_i^2$, а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию, в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент наиболее общего вида

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k \text{ ”.}$$

Позднее, в 1930 г. А. Эйнштейн писал [11]:

“В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 (фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференциалов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца”.

Хотя здесь Эйнштейн и пользуется инвариантом (интервалом), открытым Пуанкаре, но понимает его только в ограниченном (строго диагональном) смысле. А. Эйнштейну трудно было увидеть, что за преобразованиями Лоренца и относительностью времени скрыт фундаментальный факт: пространство и время образуют единый четырехмерный континуум с псевдоевклидовой геометрией, определяемой интервалом

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad \det(\gamma_{\mu\nu}) < 0, \quad (3.35)$$

с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$, для которого тензор кривизны Римана равен нулю. Но именно существование четырехмерного пространства событий с псевдоевклидовой метрикой позволило установить, что ряд векторных величин евклидова трехмерного пространства на самом деле являются компонентами четырехмерных величин наряду с некоторыми скалярами в евклидовом пространстве.

Это было осуществлено А. Пуанкаре и далее развито Г. Минковским. Очень часто, не понимая сути теории, пишут, что Минковский якобы дал геометрическую интерпретацию теории относительности. Это неверно. А. Пуанкаре и Г. Минковский на основе группы, найденной Пуанкаре, открыли псевдоевклидову геометрию пространства-времени, что и составляет суть специальной теории относительности.

Об этом в 1909 г. в статье “Пространство и время” Г. Минковский писал:

*“Понятия пространства ни Эйнштейн, ни Лоренц не касались, может быть, потому, что при упомянутом выше специальном преобразовании, при котором плоскость x', t' совпадает с плоскостью x, t , возможно толкование, что ось x пространства сохраняет свое положение. Попытку перешагнуть через понятия пространства соответствующим образом в самом деле можно было бы расценить как некоторую дерзость математической мысли. Но после такого все-таки неизбежного шага для истинного понимания группы G_c (речь идет о группе Лоренца. – А. Л.) термин «**постулат относительности**» для требования инвариантности по отношению к группе G_c кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название «**постулат абсолютного мира**» (или, коротко, **мировой постулат**)”*.

Удивительно, но в работе Г. Минковского нет ссылки на статьи А. Пуанкаре [2; 3], хотя она только детализирует то, что уже содержится в этих статьях. Однако, яркостью изложения перед широкой аудиторией естествоиспытателей она привлекла к себе всеобщее внимание. В 1913 г. в Германии был издан сборник статей по теории относительности Г.А. Лоренца, А. Эйнштейна, Г. Минковского. Основополагающих работ А. Пуанкаре [2; 3] там нет. В замечаниях А. Зоммерфельда к работе Минковского Пуанкаре упоминается только в связи с частными вопросами. Такое замалчивание основополагающих

работ по теории относительности А. Пуанкаре объяснить просто.

Впервые Э. Уиттекер 50 лет тому назад, изучая историю создания теории относительности, пришел к выводу о решающем вкладе А. Пуанкаре в эту проблему. Его монография вызвала весьма раздраженную реакцию некоторых авторов. Однако, в основном Э. Уиттекер был прав. **А. Пуанкаре, опираясь на работу Лоренца 1904 г., действительно создал теорию относительности и придал ей общий характер, распространив на все физические явления.** Вместо более тщательного изучения и сравнения работы А. Эйнштейна 1905 г. и статей А. Пуанкаре, а это как раз единственный путь объективного изучения проблемы, был избран путь полного отрицания выводов Э. Уиттекера. Так, без детальных исследований в литературе проводилась мысль, что теория относительности создана независимо и только А. Эйнштейном. Так считал и я до середины 80-х годов, пока сам внимательно не прочитал статьи А. Пуанкаре и А. Эйнштейна.

§ 4. Относительность времени и сокращение длины

Рассмотрим ход времени в двух инерциальных системах отсчета, из которых одну будем считать неподвижной, а другую – движущейся относительно первой со скоростью v . Согласно принципу относительности ход часов (при выбранном масштабе времени) в этих системах одинаков. Поэтому они одинаково отсчитывают **свое физическое** время. Если часы покоятся в движущейся системе отсчета, то интервал их в этой системе отсчета равен

$$d\sigma^2 = c^2 dt'^2, \quad (4.1)$$

t' – время по часам в этой системе отсчета.

Поскольку часы относительно другой системы отсчета движутся со скоростью v , то тот же интервал, но уже в покоящейся системе отсчета будет равен

$$d\sigma^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (4.2)$$

здесь t – время по часам, покоящимся в этой системе отсчета, и

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \quad (4.3)$$

Из соотношений (4.1) и (4.2) находим связь между **длительностью времени** в этих инерциальных системах отсчета при описании **физического явления**

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.4)$$

Часто пишут, что происходит замедление хода движущихся часов. Это неправильно, поскольку это утверждение противоречит принципу относительности. Ход часов во всех инерциальных системах отсчета не меняется. Они одинаково отсчитывают физическое время своей инерциальной системы отсчета. Изменяется не ход часов, а длительность времени физического процесса. Длительность времени протекания локального физического процесса по часам в данной инерциальной системе отсчета и по часам в любой другой инерциальной системе отсчета различна. Она минимальна в той системе отсчета, где процесс локализован в какой-либо точке пространства. Именно этот смысл и вкладывается в слова о **замедлении времени**.

Интегрируя соотношение (4.4), получим

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.5)$$

Это выражение есть следствие наличия фундаментального инварианта (3.22). Как отмечал В. Паули, “из преобразований Лоренца” оно **“было ясно выявлено Эйнштейном”**.

Применим это соотношение к элементарной частице со временем жизни в состоянии покоя равным τ_0 . На основании (4.5), положив $\Delta t' = \tau_0$, находим время жизни движущейся частицы

$$\Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.6)$$

Именно благодаря этому эффекту и удается транспортировать в вакууме пучки частиц высокой энергии на достаточно большие расстояния от ускорителя к экспериментальным установкам, хотя их время жизни в покоящемся состоянии очень мало.

В рассмотренном выше случае мы имели дело с времени-подобным интервалом $ds^2 > 0$. Рассмотрим другой пример,

когда интервал между событиями пространственноподобный $d\sigma^2 < 0$. Рассмотрим опять две такие же инерциальные системы отсчета. Пусть в движущейся системе отсчета измеряется длина стержня, покоящегося в другой системе отсчета. Дадим определение способа измерения длины движущегося стержня. Пусть концы этого стержня X'_1 и X'_2 наблюдатель, находящийся в движущейся системе отсчета, фиксирует в **один и тот же момент времени**

$$T'_1 = T'_2, \quad (4.7)$$

что позволяет свести интервал S_{12}^2 в движущейся системе отсчета только к пространственной части

$$S_{12}^2 = -(X'_2 - X'_1)^2 = -\ell^2. \quad (4.8)$$

Таким образом, при нашем способе определения длины движущегося стержня, величину ℓ естественно и считать его длиной.

Тот же интервал в неподвижной системе отсчета, где стержень находится в состоянии покоя, равен

$$S_{12}^2 = c^2(T_2 - T_1)^2 - (X_2 - X_1)^2. \quad (4.9)$$

Но согласно преобразованиям Лоренца имеем

$$T'_2 - T'_1 = \gamma \left[(T_2 - T_1) - \frac{v}{c^2} (X_2 - X_1) \right], \quad (4.10)$$

откуда для нашего случая (4.7) находим

$$T_2 - T_1 = \frac{v}{c^2} (X_2 - X_1) = \frac{v}{c^2} \ell_0, \quad (4.11)$$

ℓ_0 — длина стержня в неподвижной системе отсчета. Подставляя это выражение в (4.9), получим

$$S_{12}^2 = -\ell_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (4.12)$$

Сравнивая (4.8) и (4.12), находим

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.13)$$

Из соотношений (4.7) и (4.11) мы видим, что **одновременные события в одной инерциальной системе отсчета не будут одновременными в другой инерциальной системе, поэтому понятие одновременности относительно. Относительность времени есть прямое следствие определения одновременности в разных точках пространства инерциальной системы отсчета с помощью светового сигнала. Сокращение (4.13) является следствием относительного характера одновременности, или более точно – наличия фундаментального инварианта (3.22).**

Таким образом, мы установили, что согласно специальной теории относительности промежуток времени между событиями для локального объекта и длина стержня, при фиксированном способе измерения (4.7), относительны. Они зависят от выбора инерциальной системы. Абсолютный смысл имеет только интервал между событиями. Следует особо отметить, что сокращение длины стержня (4.13) определяется не только псевдоевклидовой структурой пространства-времени, но и нашим **способом измерения длины**, поэтому сокращение в отличие от замедления времени (4.5) не имеет такого существенного физического значения. Это объясняется тем, что замедление времени относится к **локальному объекту**, а такие объекты существуют в природе, они описываются времениподобным интервалом $d\sigma^2 > 0$; следовательно, здесь осуществляется причинная связь. Сокращение длины относится к разным пространственным точкам и поэтому описывается пространственноподобным интервалом $d\sigma^2 < 0$, когда причинная связь отсутствует.

Вернемся к вопросу о сокращении Лоренца, определяемом формулой (4.13). Мы видели, что в рассмотренном выше случае, когда стержень покоится в нештрихованной инерциальной системе отсчета и имеет длину ℓ_0 , для всех наблюдателей, находящихся в других инерциальных системах отсчета, при принятом способе измерения длины (4.7), имеет место сокращение, и длина будет определяться формулой (4.13). Совершенно очевидно, что при этом со стержнем ничего не происходит. Некоторые авторы называют этот эффект сокращения кинематическим, поскольку никакой деформации стержень при этом не испытывает. И в этом они правы, и нет никаких оснований их критиковать. Однако надо отметить, что эта кинематика есть следствие псевдоевклидовой структуры пространства, которая отражает общие динамические свойства материи – законы сохранения.

Об этой ситуации А. Пуанкаре еще в 1905 г. в работе [3] писал:

“...если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и электромагнитных законах мы нашли бы общую постоянную – скорость света. Точно также мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире, – электромагнитного происхождения, или же это свойство, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть не что иное, как внешняя видимость, что-то связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные, одно на место другого; но в современной теории, принимая

во внимание сокращение Лоренца, это уже неверно. Согласно этой теории, двумя равными отрезками, по определению, будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время”.

(выделено мной. – А.Л.)

Совершенно иная ситуация возникает при ускоренном движении. Если, например, стержень, покоящийся в нештрихованной инерциальной системе отсчета и имеющий длину ℓ_0 , начинает двигаться с постоянным ускорением вдоль его длины, причем так, что **оба его конца начинают движение одновременно**, то в системе отсчета, связанной со стержнем, его длина будет увеличиваться по закону

$$L = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}.$$

Если здесь учесть формулу (12.3), то можно выразить скорость $v(t)$ через ускорение a и получить выражение

$$L = \ell_0 \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}.$$

Увеличение длины стержня со временем непосредственно следует из одинаковости интервала событий в нештрихованной инерциальной системе отсчета и в движущейся с ускорением a системе, в которой стержень покоится. Это означает, что стержень испытывает разрывные напряжения.

Ранее мы нашли преобразования Лоренца для случая, когда движение одной системы координат относительно другой инерциальной системы происходило с постоянной скоростью вдоль оси X . Рассмотрим теперь общий случай, когда движение происходит со скоростью $\vec{v}$ в произвольном направлении,

положив

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{v}T. \quad (4.14)$$

Преобразование (4.14) обеспечивает переход в инерциальную систему отсчета, начало координат которой движется относительно исходной системы отсчета с постоянной скоростью $\vec{v}$.

Разложим векторы $\vec{R}$, $\vec{R}'$ в трехмерном векторном пространстве исходной галилеевой системы координат по направлению скорости $\vec{v}$ и по направлению, перпендикулярному к скорости $\vec{v}$:

$$\vec{R} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} R_{\parallel} + \vec{R}_{\perp}, \quad \vec{R}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} R'_{\parallel} + \vec{R}'_{\perp}. \quad (4.15)$$

На основании преобразований Лоренца (3.1) можно ожидать, что будут изменяться только продольные величины, поперечные же останутся без изменений:

$$R'_{\parallel} = \gamma(R_{\parallel} - vT), \quad T' = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2}R_{\parallel}\right), \quad \vec{R}'_{\perp} = \vec{R}_{\perp}. \quad (4.16)$$

Из (4.15) находим

$$R_{\parallel} = \frac{(\vec{v}\vec{R})}{v}, \quad \vec{R}_{\perp} = \vec{R} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{R})}{v^2}. \quad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.16), а затем в (4.15), получим

$$\vec{R}' = \vec{R} + (\gamma - 1)\frac{(\vec{v}\vec{R})}{v^2}\vec{v} - \gamma\vec{v}T, \quad (4.18)$$

$$T' = \gamma\left(T - \frac{(\vec{v}\vec{R})}{c^2}\right). \quad (4.19)$$

При получении формул (4.18) и (4.19) мы считали, что при общем преобразовании (4.14) изменяется, в соответствии

с преобразованиями Лоренца (3.1), только составляющая вектора $\vec{R}$ вдоль направления скорости $\vec{v}$, тогда как поперечная составляющая остается без изменения.

Установим правильность этого предположения. Для этой цели будем исходить из инварианта (3.22). Подставляя (4.14) в (3.22), получим

$$J = c^2 T^2 - (\vec{r} + \vec{v} T)^2 = c^2 T^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - 2(\vec{v} \vec{r}) T - \vec{r}^2. \quad (4.20)$$

Выделим в инварианте J времениподобную часть

$$J = c^2 \left[\frac{T}{\gamma} - \gamma \frac{(\vec{v} \vec{r})}{c^2} \right]^2 - \vec{r}^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \vec{r})^2. \quad (4.21)$$

Наша цель – найти такие новые переменные T' и $\vec{R}'$, в которых это выражение можно записать в диагональной форме

$$J = c^2 T'^2 - \vec{R}'^2. \quad (4.22)$$

Из сравнения (4.21) и (4.22) находим время T' в движущейся системе отсчета

$$T' = \frac{T}{\gamma} - \frac{\gamma}{c^2} (\vec{v} \vec{r}). \quad (4.23)$$

Выражая правую часть в (4.23) через переменные T , $\vec{R}$, получим

$$T' = \gamma \left(T - \frac{\vec{v} \vec{R}}{c^2} \right). \quad (4.24)$$

Пространственноподобную часть инварианта J в (4.21) также выразим через переменные T , $\vec{R}$

$$\vec{r}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \vec{r})^2 = \vec{R}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \vec{R})^2 - 2\gamma^2 (\vec{v} \vec{R}) T + \gamma^2 v^2 T^2. \quad (4.25)$$

Легко убедиться, что первые два члена (4.25) можно записать в форме

$$\vec{R}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v} \vec{R})^2 = \left[\vec{R} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}(\vec{v} \vec{R})}{v^2} \right]^2, \quad (4.26)$$

а следовательно, выражение (4.25) принимает вид

$$\begin{aligned} \vec{r}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v} \vec{r})^2 = & \left[\vec{R} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}(\vec{v} \vec{R})}{v^2} \right]^2 - \\ & - 2\gamma^2(\vec{v} \vec{R})T + v^2\gamma^2 T^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Правую часть (4.27) можно записать в форме

$$\vec{r}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v} \vec{r})^2 = \left[\vec{R} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}(\vec{v} \vec{R})}{v^2} - \gamma \vec{v}T \right]^2. \quad (4.28)$$

Таким образом, пространственноподобная часть инварианта J принимает диагональный вид

$$\vec{r}^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v} \vec{r})^2 = (\vec{R}')^2, \quad (4.29)$$

где

$$\vec{R}' = \vec{R} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}(\vec{v} \vec{R})}{v^2} - \gamma \vec{v}T. \quad (4.30)$$

Формулы (4.24) и (4.30) совпадают с формулами (4.18) и (4.19); это свидетельствует о том, что наше предположение, сделанное ранее при их выводе, правильно.

Следует особо подчеркнуть, что выше, основываясь на форминвариантности инварианта (3.22), мы путем **тождественных преобразований** нашли **общие формулы**, связывающие

координаты $(T, \vec{R})$ исходной инерциальной системы отсчета с координатами $(T', \vec{R}')$ системы отсчета, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью $\vec{v}$. Если с помощью преобразований (4.24) и (4.30) перейти от инерциальной системы S к системе S' , а затем к системе S'' , то после таких двух последовательных преобразований мы получим преобразование, которое будет отличаться от преобразований (4.24) и (4.30) вращением в трехмерном пространстве. Последнее означает, что преобразования (4.24) и (4.30) не образуют подгруппу группы Лоренца. Отмеченное выше вращение приводит оси системы отсчета S к одинаковой ориентации с осями в системе отсчета S'' . Именно этим обстоятельством и обусловлен эффект Томаса, который мы рассмотрим в § 14.

Общий вывод преобразований Лоренца исходя из принципа относительности, принципа инерции Галилея и уравнения фронта волны дан академиком В.А. Фоком в его монографии [12, добавление А]. Его анализ показывает, что на основании только двух постулатов Эйнштейна (см. наст. изд., с. 41) нельзя вывести преобразования Лоренца.

§ 5. Сложение скоростей

Дифференцируя преобразования Лоренца (3.1) по переменной T , получим формулы сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_z = u_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \quad (5.1)$$

Здесь

$$u_x = \frac{dX}{dT}, \quad u_y = \frac{dY}{dT}, \quad u_z = \frac{dZ}{dT}, \quad (5.2)$$

$$u'_x = \frac{dX'}{dT'}, \quad u'_y = \frac{dY'}{dT'}, \quad u'_z = \frac{dZ'}{dT'}. \quad (5.3)$$

При выводе (5.1) мы использовали формулу

$$\frac{dT'}{dT} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x \right). \quad (5.4)$$

Аналогично можно получить и общие формулы, если использовать выражения (4.18), (4.19):

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{v}\vec{u})}{v^2} \vec{v} - \gamma \vec{v}}{\gamma \left[1 - \frac{(\vec{v}\vec{u})}{c^2} \right]}, \quad \frac{dT'}{dT} = \gamma \left[1 - \frac{(\vec{v}\vec{u})}{c^2} \right]. \quad (5.5)$$

Мы увидим далее (§ 16), что пространство скоростей есть пространство Лобачевского.

§ 6. Элементы векторного и тензорного анализа в пространстве Минковского

Все физические величины должны быть определены таким образом, чтобы их физический смысл не зависел от выбора системы координат.

Пусть в четырехмерном пространстве Минковского задана некоторая система координат x^ν , $\nu = 0, 1, 2, 3$. Вместо этой системы координат можно выбрать другую, определяемую выражением

$$x'^\nu = f^\nu(x^\sigma). \quad (6.1)$$

Функции f^ν будем считать непрерывными, имеющими производные.

Если якобиан преобразования в каждой точке

$$J = \det \left| \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\sigma} \right| \quad (6.2)$$

отличен от нуля, то при этом условии переменные x'^ν будут независимыми, а следовательно, первоначальные переменные x^ν можно однозначно выразить через новые x'^ν

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(x'^\sigma). \quad (6.3)$$

Физические величины не должны зависеть от выбора системы координат, а поэтому они должны выражаться через геометрические объекты. Простейшим геометрическим объектом является скаляр $\phi(x)$, который преобразуется при переходе к новым переменным следующим образом

$$\phi'(x') = \phi[x(x')]. \quad (6.4)$$

Градиент от скалярной функции $\phi(x)$ преобразуется по правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}, \quad (6.5)$$

здесь, как и далее, по одинаковым индексам σ идет суммирование от 0 до 3.

Система функций, преобразующаяся при координатном преобразовании по правилу (6.5), получила название **ковариантного вектора**

$$A'_\nu(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_\sigma(x). \quad (6.6)$$

Соответственно величина $B_{\mu\nu}$, преобразующаяся по правилу

$$B'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} B_{\sigma\lambda}, \quad (6.7)$$

называется ковариантным тензором второго ранга, и т. д.

Перейдем к другой группе геометрических объектов. Рассмотрим преобразование дифференциалов координат

$$dx'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma. \quad (6.8)$$

Система функций, преобразующаяся при координатных преобразованиях по правилу (6.8), получила название **контравариантного вектора**

$$A'^\nu(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A^\sigma(x). \quad (6.9)$$

Соответственно величина $B^{\mu\nu}$, преобразующаяся по правилу

$$B'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} B^{\sigma\lambda}(x), \quad (6.10)$$

получила название контравариантного тензора второго ранга, и т. д.

Из трансформационных свойств вектора или тензора следует, что если все его компоненты равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю и в любой другой системе координат. Заметим, что **координаты x^ν не образуют вектора**, тогда как дифференциал dx^ν является вектором. Координаты x^ν образуют вектор только относительно линейных преобразований.

Вычислим величину $A'_\sigma(x')B'^\sigma(x')$

$$A'_\sigma(x')B'^\sigma(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} A_\mu(x)B^\lambda(x). \quad (6.11)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \cdot \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{при } \mu \neq \lambda \\ 1, & \text{при } \mu = \lambda. \end{cases} \quad (6.12)$$

Символ δ^μ_λ является смешанным тензором второго ранга и носит название символа Кронекера.

Учитывая (6.12) в выражении (6.11), находим

$$A'_\sigma(x')B'^\sigma(x') = A_\lambda(x)B^\lambda(x). \quad (6.13)$$

Отсюда очевидно, что эта **величина является скаляром, ее обычно называют инвариантом**.

При написании выражения (3.32) мы фактически имели дело с фундаментальным инвариантом

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\lambda}(x)dx^\mu dx^\lambda, \quad \det(\gamma_{\mu\nu}) < 0. \quad (6.14)$$

Наличие метрического тензора пространства Минковского, имеющего общий вид (3.33), позволяет осуществлять подъем и опускание индекса у векторных и тензорных величин, например:

$$A_\nu = \gamma_{\nu\lambda}(x)A^\lambda, \quad A^\lambda = \gamma^{\lambda\sigma}A_\sigma, \quad A_\nu A^\nu = \gamma_{\lambda\sigma}A^\lambda A^\sigma, \quad (6.15)$$

$$\gamma_{\mu\lambda} \gamma^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad \gamma_{\mu\lambda} = \gamma_{\lambda\mu}. \quad (6.16)$$

Тензоры можно складывать и вычитать, например

$$C_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} = A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \pm B_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}. \quad (6.17)$$

Их можно также перемножать независимо от их строения

$$C_{\mu\nu\sigma\rho}^{\alpha\beta\lambda} = A_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta} \cdot B_{\rho}^{\lambda}. \quad (6.18)$$

При этом необходимо соблюдать как порядок множителей, так и порядок индексов.

Преобразования (6.9) образуют группу. Пусть

$$A'^{\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x), \quad A''^{\mu} = \frac{\partial x''^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} A'^{\lambda}(x'), \quad (6.19)$$

отсюда имеем

$$A''^{\mu}(x'') = \frac{\partial x''^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \cdot \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x) = \frac{\partial x''^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}(x). \quad (6.20)$$

Заметим, что тензорное исчисление не зависит от метрических свойств пространства. Оно сохраняется, например, и в римановой геометрии, где в общем случае отсутствует группа движения пространства-времени. Группа же общих координатных преобразований (6.19–6.20) полностью сохраняется, поскольку она не зависит от метрических свойств пространства. Но она не имеет какого-либо физического значения.

§ 7. Группа Лоренца

А. Пуанкаре открыл, что преобразования Лоренца вместе со всеми пространственными вращениями образуют группу. Например, пусть

$$x' = \gamma_1(x - v_1 t), \quad t' = \gamma_1 \left(t - \frac{v_1}{c^2} x \right), \quad (7.1)$$

$$x'' = \gamma_2(x' - v_2 t'), \quad t'' = \gamma_2 \left(t' - \frac{v_2}{c^2} x' \right). \quad (7.2)$$

Подставляя (7.1) в (7.2), получим

$$x'' = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) x - \gamma_1 \gamma_2 (v_1 + v_2) t, \quad (7.3)$$

$$t'' = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) t - \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{v_1 + v_2}{c^2} \right) x. \quad (7.4)$$

Поскольку

$$x'' = \gamma(x - vt), \quad t'' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (7.5)$$

из сравнения (7.3) и (7.4) с (7.5), получим

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right), \quad \gamma v = \gamma_1 \gamma_2 (v_1 + v_2). \quad (7.6)$$

Из соотношений (7.6) находим

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (7.7)$$

Легко убедиться, что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right). \quad (7.8)$$

Таким образом, мы установили, что переход от системы координат x^ν к системе координат x'^ν , а затем к системе координат x''^ν эквивалентен прямому переходу от системы координат x^ν к системе x''^ν . Именно в этом случае можно говорить, что преобразования Лоренца образуют группу. Пуанкаре открыл [2] эту группу, назвав ее группой Лоренца. Он нашел генераторы группы и построил алгебру Ли группы Лоренца. А. Пуанкаре впервые установил, что для всеобщей инвариантности законов природы относительно преобразований Лоренца необходимо, чтобы физические поля и другие динамические и кинематические характеристики образовывали бы совокупность величин, преобразующихся при преобразованиях Лоренца по группе, или, точнее говоря, по одному из представлений группы Лоренца.

Несколько общих слов о группе. Группа – это совокупность элементов $A, B, C \dots$, в которой определена операция умножения. Элементы могут быть любой природы. Произведение двух любых элементов группы есть элемент той же группы. Для группы умножение должно обладать следующими свойствами.

1. Закон ассоциативности

$$(AB)C = A(BC).$$

2. В группе содержится единичный элемент E

$$AE = A.$$

3. Каждый элемент группы имеет обратный элемент

$$AB = E, \quad B = A^{-1}.$$

Преобразования из группы Лоренца можно записать в матричном виде

$$X' = AX,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'_0 \end{pmatrix},$$

$$x'_0 = ct', \quad x_0 = ct.$$

Легко проверить, что совокупность всех преобразований Лоренца удовлетворяет всем перечисленным требованиям группы.

Координатные преобразования, которые сохраняют вид метрики, образуют **группу движения пространства**. Такой группой, в частности, и является группа Лоренца.

§ 8. Инвариантность уравнений Максвелла-Лоренца

Уравнения Максвелла-Лоренца в инерциальной системе координат, называемой “неподвижной”, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\vec{j} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \rho [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (8.2)$$

В первом уравнении (8.1) второй член справа и является тем малым членом – **током смещения**, который Максвелл ввел в уравнения электродинамики. Именно о нем говорилось в § 3. Поскольку дивергенция от ротора равна нулю, из первого и третьего уравнений (8.1) следует закон сохранения тока

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (8.3)$$

Как мы видим из (8.3), ток смещения позволил привести в соответствие уравнения электродинамики с законом сохранения электрического заряда. Для того чтобы четвертое уравнение из (8.1) выполнялось тождественно, представим $\vec{H}$ в форме

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (8.4)$$

Таким образом, мы ввели векторный потенциал $\vec{A}$. Подставляя выражение (8.4) во второе уравнение из (8.1), получим

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.5)$$

Чтобы уравнение (8.5) тождественно удовлетворялось, выражение в скобках должно быть градиентом некоторой функции ϕ

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi. \quad (8.6)$$

Таким образом, мы ввели понятие скалярного потенциала ϕ . Для заданных значений $\vec{E}$ и $\vec{H}$ потенциалы ϕ и $\vec{A}$, как мы увидим ниже (§ 10), определяются неоднозначно, поэтому выбирая их таким образом, чтобы имело место условие Л. Лоренца

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0, \quad (8.7)$$

из уравнений (8.1), учитывая формулы

$$\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi, \quad \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A},$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

а также соотношение (8.7), находим уравнения для потенциалов ϕ и $\vec{A}$ в следующем виде

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \square \phi = 4\pi \rho. \quad (8.8)$$

Для того чтобы уравнение сохранения заряда было форминвариантным относительно преобразований Лоренца необходимо, чтобы плотность ρ и ток являлись компонентами контравариантного вектора S^ν

$$S^\nu = (c\rho, \vec{j}) = (S^0, \vec{S}), \quad \vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (8.9)$$

Контравариантный вектор S^ν преобразуется при преобразованиях Лоренца так же, как $(ct, \vec{x})$. Уравнение сохранения заряда (8.3) принимает вид

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad (8.10)$$

по одинаковым индексам ν идет суммирование. Учитывая (8.9), перепишем уравнения (8.8) в виде

$$\square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{S}, \quad \square \phi = \frac{4\pi}{c} S^0. \quad (8.11)$$

Чтобы эти уравнения не изменяли своего вида при преобразованиях Лоренца необходимо, чтобы скалярный и векторный потенциалы являлись компонентами контравариантного вектора A^ν

$$A^\nu = (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A}). \quad (8.12)$$

Поскольку оператор $\square$, как мы ранее показали, не меняет своего вида при преобразованиях Лоренца, уравнения (8.11) в любой инерциальной системе отсчета будут иметь вид

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} S^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (8.13)$$

Впервые векторы S^ν и A^ν ввел Анри Пуанкаре [3].

Объединение ϕ и $\vec{A}$ в четырехвектор A^ν необходимо: поскольку правая часть (8.13) есть вектор S^ν , то и левая часть должна преобразовываться как вектор. Отсюда непосредственно следует, что если в некоторой инерциальной системе отсчета имеется только электрическое поле, то в любой другой системе отсчета из-за того, что A^ν преобразуется как вектор, наряду с электрическим полем будет и магнитное поле. Это непосредственное следствие выполнения требования принципа относительности для электромагнитных явлений.

Преобразования Лоренца для вектора S^ν имеют такой же вид, как и для вектора $(ct, \vec{x})$

$$S'_x = \gamma \left(S_x - \frac{u}{c} S^0 \right), \quad S'^0 = \gamma \left(S^0 - \frac{u}{c} S_x \right). \quad (8.14)$$

Учитывая компоненты вектора S^ν (8.9), находим

$$\rho' = \gamma \rho \left(1 - \frac{u}{c^2} v_x \right), \quad \rho' v'_x = \gamma \rho (v_x - u). \quad (8.15)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (8.16)$$

u – скорость системы отсчета.

Преобразования для компонент S_y, S_z имеют вид

$$\rho' v'_y = \rho v_y, \quad \rho' v'_z = \rho v_z. \quad (8.17)$$

Все эти формулы впервые были получены А. Пуанкаре [2].

Из них следуют формулы для сложения скоростей

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}. \quad (8.18)$$

Введем ковариантный вектор S_ν

$$S_\nu = \gamma_{\nu\lambda} S^\lambda; \quad (8.19)$$

учитывая, что $\gamma_{\nu\lambda} = (1, -1, -1, -1)$, из (8.19) получим

$$S_0 = S^0, \quad S_i = -S^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.20)$$

Составим инвариант

$$S_\nu S^\nu = c^2 \rho^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 \rho_0^2, \quad (8.21)$$

здесь ρ_0 – плотность заряда в системе отсчета, где заряд покоится. Отсюда имеем

$$\rho_0 = \rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.22)$$

Г. Минковский ввел антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (8.23)$$

который автоматически удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (8.24)$$

Поскольку $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$, $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, то легко убедиться, что

$$\begin{aligned} -H_x &= F_{23}, \quad -H_y = F_{31}, \quad -H_z = F_{12}, \\ -E_x &= F_{10}, \quad -E_y = F_{20}, \quad -E_z = F_{30}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Система уравнений (8.24) эквивалентна системе уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0. \quad (8.26)$$

Систему уравнений (8.13) с помощью тензора $F^{\mu\nu}$ можно записать в форме

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} S^\mu. \quad (8.27)$$

Тензор $F^{\mu\nu}$ связан с компонентами полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следующими соотношениями

$$\begin{aligned} -H_x &= F^{23}, \quad -H_y = F^{31}, \quad -H_z = F^{12}, \\ E_x &= F^{10}, \quad E_y = F^{20}, \quad E_z = F^{30}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Все это можно записать в виде таблицы, в которой первый индекс $\mu = 0, 1, 2, 3$ обозначает строки, а второй ν – столбцы

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что величины $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются при преобразованиях Лоренца как отдельные компоненты тензора $F^{\mu\nu}$. Ни Лоренц, ни Эйнштейн это не установили, поэтому им не удалось показать форминвариантность уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца ни в пространстве без зарядов, ни в пространстве с зарядами.

Особо отметим, что одинаковый вид уравнений в двух системах координат при преобразованиях Лоренца еще не означает их форминвариантности при этих преобразованиях. Для форминвариантности уравнений необходимо установить, что преобразования Лоренца образуют группу, а полевые величины (например, $\vec{E}$ и $\vec{H}$) преобразуются по представлению этой группы.

Учитывая связь между компонентами тензора $F^{\mu\nu}$ и компонентами электрического и магнитного полей, можно получить закон преобразования для компонент электрического поля

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma \left(E_y - \frac{u}{c} H_z \right),$$

$$E'_z = \gamma \left(E_z + \frac{u}{c} H_y \right),$$
(8.29)

и для компонент магнитного поля

$$\begin{aligned} H'_x &= H_x, \quad H'_y = \gamma \left(H_y + \frac{u}{c} E_z \right), \\ H'_z &= \gamma \left(H_z - \frac{u}{c} E_y \right). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Эти формулы впервые были открыты Лоренцем, однако ни он, ни позднее Эйнштейн не установили их группового характера. Это впервые сделал А. Пуанкаре, открыв законы преобразования для скалярного и векторного потенциалов [3]. Поскольку ϕ и $\vec{A}$ преобразуются так же, как $(ct, \vec{x})$, А. Пуанкаре с помощью формул (8.4) и (8.6) определил процедуру нахождения величин $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при переходе в любую другую инерциальную систему отсчета.

Из формул преобразования для электрического и магнитного полей следует, что если, например, в системе отсчета K' магнитное поле равно нулю, то в другой системе отсчета оно уже отлично от нуля и равно

$$H_y = -\frac{u}{c} E_z, \quad H_z = \frac{u}{c} E_y, \quad \text{или} \quad \vec{H} = \frac{1}{c} [\vec{u}, \vec{E}]. \quad (8.31)$$

Из компонент поля можно построить два инварианта относительно преобразований Лоренца:

$$E^2 - H^2, \quad (\vec{E}\vec{H}). \quad (8.32)$$

Эти инварианты электромагнитного поля впервые открыл А. Пуанкаре [3].

Инварианты (8.32) могут быть выражены через антисимметричный тензор электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$

$$E^2 - H^2 = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \vec{E}\vec{H} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}, \quad (8.33)$$

здесь

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda}, \quad (8.34)$$

$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}$ – тензор Леви-Чивита, $\varepsilon^{0123} = 1$, при перестановке любых двух индексов тензор Леви-Чивита меняет знак.

Согласно второму инварианту (8.32) поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, взаимно-перпендикулярные в одной системе отсчета, остаются таковыми в любой другой системе отсчета. Если в системе K поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны, но не равны, то всегда можно найти такую систему отсчета, в которой поле будет чисто электрическим или чисто магнитным в зависимости от знака первого инварианта из (8.33).

Остановимся теперь на выводе **уравнения Пойнтинга** (1884 г.). Для этой цели умножим обе части первого уравнения (8.1) на вектор $\vec{E}$, а обе части второго уравнения (8.1) – на вектор $\vec{H}$; после их вычитания, находим

$$\frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\rho \vec{v} \vec{E} - \frac{c}{4\pi} \left(\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} \right).$$

Используя формулу векторного анализа

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b},$$

получим **уравнение Пойнтинга**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\rho \vec{v} \vec{E} - \operatorname{div} \vec{S},$$

где

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$$

называют **вектором Пойнтинга**. Интегрируя уравнение Пойнтинга по объему V и используя теорему Гаусса, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int_V \rho \vec{v} \vec{E} dV - \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\sigma}.$$

Член слева определяет изменение электромагнитной энергии в объеме V в единицу времени. Первый член справа характеризует работу, совершаемую электрическим полем над зарядами, находящимися в объеме V . Второй член справа определяет **поток энергии электромагнитного поля** через поверхность Σ , которая ограничивает объем V .

Формулировка закона сохранения энергии с помощью **понятия потока энергии** была впервые дана в общей форме Н. А. Умовым. Представление о **потоке энергии** стало важнейшим в физике. На основе уравнения Пойнтинга можно доказать **теорему однозначности** в следующей формулировке (см.: Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. С. 428-429):

“... электромагнитное поле в любой момент времени $t_1 > 0$ в любой точке объема V , ограниченного произвольной замкнутой поверхностью S , однозначно определяется уравнениями Максвелла, если заданы начальные значения электромагнитных векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ во всем этом участке пространства для момента $t = 0$ и если, кроме того, для одного из этих векторов (например $\vec{E}$) известны граничные значения его тангенциальных составляющих на поверхности S в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$.”

Предположим противное, т. е. предположим, что существуют две различные системы решений максвелловых уравнений $\vec{E}', \vec{H}'$ и $\vec{E}'', \vec{H}''$, удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. Ввиду линейности уравнения поля разность этих решений $\vec{E}''' = \vec{E}' - \vec{E}''$ и $\vec{H}''' = \vec{H}' - \vec{H}''$ также должна удовлетворять уравнениям Максвелла при следующих дополнительных условиях:

$$a) \vec{E}^{стр} = 0,$$

b) в момент $t = 0$ во всех точках объема V : $\vec{E}''' = 0, \vec{H}''' = 0$ (ибо при $t = 0$ $\vec{E}'$, $\vec{E}''$ и $\vec{H}'$, $\vec{H}''$ имеют, по предположению, одинаковые заданные значения),

c) в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$ во всех точках поверхности S тангенциальные слагающие вектора $\vec{E}'''$ либо вектора $\vec{H}'''$ равны нулю (по той же причине).

Применим к этому полю $\vec{E}'''$, $\vec{H}'''$ вытекающую из максвелловых уравнений теорему Пойнтинга, положив в ней, согласно сказанному, работу сторонних сил P равной нулю. Входящий в уравнение Пойнтинга поверхностный интеграл будет равен нулю в течение всего промежутка времени от $t = 0$ до $t = t_1$, ибо из условия (c) следует, что на поверхности S

$$S_n = [\vec{E}''' \vec{H}''']_n = 0;$$

стало быть, в любой момент этого промежутка

$$\frac{\partial W'''}{\partial t} = - \int_V \frac{\vec{j}'''^2}{\lambda} dV.^2$$

Так как подынтегральное выражение существенно положительно, то

$$\frac{\partial W'''}{\partial t} \leq 0,$$

т. е. энергия поля W''' может либо убывать, либо оставаться постоянной. Но при $t = 0$, согласно условию (b), энергия W''' поля $\vec{E}'''$, $\vec{H}'''$ равнялась нулю; отрицательных же значений она принимать не может; стало быть, и в течение всего

$$^2 \vec{j}''' = \lambda \vec{E}'''$$

рассматриваемого промежутка $0 \leq t \leq t_1$, энергия

$$W''' = \frac{1}{8\pi} \int_V (\vec{E}'''^2 + \vec{H}'''^2) dV$$

должна оставаться равной нулю, что может иметь место лишь в том случае, если $\vec{E}'''$ и $\vec{H}'''$ остаются равными нулю во всех точках объема V . А это значит, что две системы решений исходной задачи $\vec{E}', \vec{H}'$ и $\vec{E}'', \vec{H}''$, предполагавшиеся нами различными, по необходимости тождественны между собой. Таким образом, теорема однозначности доказана.

Легко убедиться, что при рассмотрении всего безграничного пространства задание значений векторов поля на граничной поверхности S может быть заменено наложением следующих условий в бесконечности:

ER^2 и HR^2 при $R \rightarrow \infty$ остаются конечными.

Действительно, из этих условий следует, что интеграл вектора Пойнтинга по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль. Это обстоятельство позволяет доказать, исходя из уравнения Пойнтинга, применимость полученного выше неравенства ко всему бесконечному пространству. Из этого же неравенства, как мы видели, следует однозначность решений уравнения поля”.

Для выполнения принципа относительности для всех электромагнитных явлений, кроме требования неизменности уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца, необходимо, чтобы при этих преобразованиях оставались также неизменными уравнения движения заряженных частиц под действием силы Лоренца.

Все это было осуществлено только в работах А. Пуанкаре [2; 3]. Неизменность физических уравнений во всех инерциальных системах и означает тождественность физических явлений в этих системах при одинаковых условиях. Именно поэтому все **естественные эталоны** во всех инерциальных системах отсчета **одинаковы**. Отсюда, в частности, следует **равенство** постоянных кристаллических решеток $NaCl$, взятых покоящимися в двух движущихся относительно друг друга инерциальных системах отсчета. В этом и заключается принцип относительности. Именно так понимался принцип относительности и в классической механике. Поэтому приходится удивляться тому, что написал академик В.Л. Гинзбург в той же статье (см. наст. изд.: сноска 1 на с. 53):

“Добавлю, что, перечитав сейчас (через 70 лет после их опубликования!) работы Лоренца и Пуанкаре и зная заранее результат (а это, как известно, чрезвычайно облегчает понимание), я лишь с трудом смог понять, почему доказанная в этих работах инвариантность уравнений электродинамики относительно преобразований Лоренца могла тогда рассматриваться в качестве свидетельства справедливости принципа относительности”.

Хотя А. Эйнштейн в 1948 г. писал:

“С помощью преобразования Лоренца специальный принцип относительности может быть сформулирован следующим образом: законы природы инвариантны относительно преобразования Лоренца (т. е. закон природы не должен измениться, если отнести его к новой инерциальной системе при помощи преобразования Лоренца для x, y, z, t)”.

Сравните это теперь с тем, что писал А. Пуанкаре в 1905 г.:

*“... Если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе без того, чтобы имели место какие-либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть **преобразованиями Лоренца**; две системы, одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно, представляют, таким образом, точное изображение одна другой”.*

Мы видим, что классические работы требуют внимательного чтения, не говоря уже о размышлении.

Установим теперь закон преобразования силы Лоренца при переходе от одной инерциальной системы к другой. Уравнения движения будут установлены в девятом параграфе. Выражение для силы Лоренца, отнесенной к единице объема, в системе отсчета K имеет вид (8.2)

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \rho \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] . \quad (8.35)$$

Тогда в системе отсчета K' мы должны иметь аналогичное выражение

$$\vec{f}' = \rho' \vec{E}' + \rho' \frac{1}{c} [\vec{v}', \vec{H}'] . \quad (8.36)$$

Заменяя все величины их значениями (8.15), (8.17), (8.29), (8.30) и (8.35), получим

$$f'_x = \gamma \left(f_x - \frac{u}{c} f \right), \quad f' = \gamma \left(f - \frac{u}{c} f_x \right), \quad (8.37)$$

$$f'_y = f_y, \quad f'_z = f_z, \quad (8.38)$$

здесь через f обозначено выражение

$$f = \frac{1}{c} (\vec{v} \vec{f}) . \quad (8.39)$$

Эти формулы впервые были найдены Пуанкаре. Мы видим, что скаляр f и вектор $\vec{f}$ преобразуются так же, как компоненты $(x^0, \vec{x})$. Установим теперь закон преобразования силы, отнесенной к единице заряда

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}], \quad \vec{F} = \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad F = \frac{f}{\rho}. \quad (8.40)$$

Используя (8.37), (8.38) и (8.39), найдем

$$F'_x = \gamma \frac{\rho}{\rho'} \left(F_x - \frac{u}{c} F \right), \quad F' = \gamma \frac{\rho}{\rho'} \left(F - \frac{u}{c} F_x \right), \quad (8.41)$$

$$F'_y = \frac{\rho}{\rho'} F_y, \quad F'_z = \frac{\rho}{\rho'} F_z. \quad (8.42)$$

На основании (8.15) имеем

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}. \quad (8.43)$$

Для упрощения (8.43) выведем тождество. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета K два тела имеют соответственно четырехскорости U_1^ν и U_2^ν (см. (9.1))

$$U_1^\nu = \left(\gamma_1, \frac{\vec{v}_1}{c} \gamma_1 \right), \quad U_2^\nu = \left(\gamma_2, \frac{\vec{v}_2}{c} \gamma_2 \right); \quad (8.44)$$

тогда в системе K' , в которой первое тело покоится, их четырехскорости будут равны

$$U_1^{\nu'} = (1, 0), \quad U_2^{\nu'} = \left(\gamma', \frac{\vec{v}'}{c} \gamma' \right). \quad (8.45)$$

Поскольку произведение четырехвекторов является инвариантом, получим

$$\gamma' = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right). \quad (8.46)$$

Полагая в этом выражении $\vec{v}_2 = \vec{v}$, а $\vec{v}_1 = u$ (скорость вдоль оси x), находим

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(v')^2}{c^2}}. \quad (8.47)$$

На основании (8.43) и (8.47) имеем

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(v')^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.48)$$

$\vec{v}'$ – скорость заряда в системе K' . Это же соотношение следует из инварианта (8.21). Подставляя (8.48) в (8.41) и (8.42), получим четырехсилу R^ν , определяемую выражением

$$R = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.49)$$

которая преобразуется при преобразованиях Лоренца так же, как $(ct, \vec{x})$

$$R'_x = \gamma \left(R_x - \frac{u}{c} R \right), \quad R' = \gamma \left(R - \frac{u}{c} R_x \right), \quad (8.50)$$

$$R'_y = R_y, \quad R'_z = R_z.$$

Такой четырехвектор силы впервые ввел Пуанкаре [2; 3].

Силу Лоренца (8.35) с помощью формул (8.28) и (8.9) можно записать в форме

$$f^\nu = \frac{1}{c} F^{\nu\mu} S_\mu; \quad (8.51)$$

аналогично, для четырехвектора силы R^ν имеем

$$R^\nu = F^{\nu\mu} U_\mu. \quad (8.52)$$

Найдем теперь тензор энергии-импульса электромагнитного поля. С помощью выражений (8.51) и (8.27) получим

$$f_\nu = -\frac{1}{4\pi} [\partial_\alpha (F_{\nu\mu} F^{\mu\alpha}) - F^{\mu\alpha} \partial_\alpha F_{\nu\mu}]. \quad (8.53)$$

Используя тождество (8.24), второй член можно записать в форме

$$F^{\mu\alpha} \partial_\alpha F_{\nu\mu} = -\frac{1}{4} \partial_\nu F^{\mu\beta} F_{\mu\beta}.$$

Учитывая это равенство, имеем

$$f_\nu = -\partial_\alpha T_\nu^\alpha, \quad (8.54)$$

где величина T_ν^α является тензором энергии-импульса электромагнитного поля

$$T_\nu^\alpha = \frac{1}{4\pi} F_{\nu\mu} F^{\mu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_\nu^\alpha F^{\mu\beta} F_{\mu\beta},$$

или в симметричной форме

$$T^{\alpha\sigma} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\mu} F^{\sigma\rho} \gamma_{\mu\rho} + \frac{1}{16\pi} \gamma^{\alpha\sigma} F^{\mu\beta} F_{\mu\beta}. \quad (8.55)$$

Подробнее об этом см. § 15, с. 219.

Компоненты тензора энергии-импульса выражаются следующим образом через напряженности полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2),$$

$$cT^{0i} = S^i = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]_i,$$

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} \left\{ E_i E_k + H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + H^2) \right\}.$$

Из формулы (8.54), интегрируя по всему пространству, находим

$$\vec{F} = \int dV \vec{f} = -\frac{d}{dt} \int \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \vec{H}] dV,$$

что совпадает с выражением, полученным А. Пуанкаре (см. § 9, с. 119).

Таким образом, вся система уравнений Максвелла-Лоренца записывается через векторы и тензоры четырехмерного пространства-времени. **Группа Лоренца, открытая на основе изучения электромагнитных явлений, была распространена А. Пуанкаре [2; 3] на все физические явления.**

В статье [3] он, развивая идеи Лоренца, писал:

“...Все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованиям Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы”.

Позднее (см. книгу “Последние мысли”, глава II “Пространство и время”) А. Пуанкаре писал:

“Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем, таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать

эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия ... Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т.е. группы движений твердых тел.

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной, и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и в первом.

Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет ...

Твердое тело – это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое

два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка”.

Далее он отмечает:

“Именно преобразования «группы Лоренца» не изменяют дифференциальных уравнений динамики. Если мы предположим, что наша система отнесена не к неподвижным осям, а к осям, обладающим переносным движением, то приходится допустить, что все тела деформируются, что шар, например, превращается в эллипсоид, малая ось которого совпадает с направлением переносного движения осей координат. В этом случае и само время испытывает глубокие изменения. Возьмем двух наблюдателей, из которых первый связан с неподвижными осями, второй – с движущимися, но оба считают себя находящимися в покое. Мы найдем, что не только та геометрическая фигура, которую первый считает шаром, будет казаться второму эллипсоидом, но что два события, которые первый будет считать одновременными, не будут таковыми для второго”.

Все высказанное выше Пуанкаре (не говоря уже о содержании его статей [2; 3]) полностью противоречит словам Эйнштейна, содержащимся в его письме профессору Цангеру (директор Института судебной медицины в Цюрихском университете) от 16.11.1911 г., что Пуанкаре “занял позицию огульного отрицания (теории относительности) и вообще проявил недостаточное понимание новой ситуации”. (Хофман Б. А. Эйнштейн. М.: Прогресс, 1984. С. 84).

Если вдуматься в слова Пуанкаре, то можно сразу почувствовать глубину его проникновения в суть физической отно-

сительности и связи геометрии и группы. Именно таким путем, исходя из неизменности уравнений Максвелла-Лоренца при преобразованиях из группы Лоренца, что обеспечивало выполнение принципа физической относительности, А. Пуанкаре открыл геометрию пространства-времени, определяемую инвариантом (3.22).

Такое пространство-время обладает свойствами однородности и изотропности. Оно отражает наличие в природе фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения для замкнутой системы. Таким образом, “новое условное соглашение” не является произвольным, оно опирается на фундаментальные законы Природы.

Приведем теперь одно удивительное высказывание Германа Вейля. В книге “Пространство, время, материя”, появившейся в 1918 г. (см. М.: Янус, 1996. С. 207), Вейль написал:

“Решение Эйнштейна (ссылка на статью Эйнштейна 1905 г. – А. Л.), которое одним ударом разрешало все трудности, заключалось в следующем. Мир – это четырехмерное аффинное пространство, в которое вложено мероопределение посредством индефинитной квадратичной формы

$$Q(x) = (xx)$$

с одним отрицательным и тремя положительными измерениями”.

Ниже он пишет:

*“ $Q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,
здесь x_i – координаты точки”.*

Но ведь все то, что написал Вейль, открыл Пуанкаре (см. статьи [2; 3]), а не Эйнштейн. Однако Г. Вейль этого не замечает и, более того, в примечании он пишет:

“К ней (имеется в виду статья Эйнштейна 1905 г. – А. Л.) близко примыкают две почти одновремен-

но появившиеся работы Лоренца и Пуанкаре, которые, впрочем, не отличаются ясностью и полнотой изложения принципиальных вопросов, характерных для работы Эйнштейна”.

Далее даются ссылки на работы Лоренца и Пуанкаре. Очень странная логика. Вейль четко сформулировал решение, “*которое одним ударом разрешало все трудности*”, но как раз то, что он сформулировал, **содержится в статьях Пуанкаре [2; 3], а не Эйнштейна**. Удивительно, как он этого не увидел, читая статьи Пуанкаре, поскольку, как он правильно отмечает, именно в этом и состоит суть теории относительности. Отсюда тривиально следуют все ее основные следствия, в том числе и определение понятия *одновременности* в разных точках пространства с помощью светового сигнала, которое А. Пуанкаре ввел в статьях, опубликованных в 1898, 1900 и 1904 гг.

Какая же ясность и полнота изложения принципиальных вопросов дополнительно необходима Вейлю, если он сам привел то, что “*одним ударом разрешало все трудности*”. Г. Вейлю следовало бы более внимательно читать и аккуратнее цитировать работы.

Выше мы убедились в том, что симметричная система уравнений (8.1), (8.2) электродинамики, инвариантная относительно координатных трехмерных ортогональных преобразований, в то же время оказалась инвариантной и относительно преобразований Лоренца в четырехмерном пространстве-времени. Такое стало возможным благодаря тому, что ряд векторных величин евклидова пространства вместе с некоторыми скалярными величинами того же пространства стали компонентами четырехмерных величин. В то же время некоторые векторные величины, например, такие как $\vec{E}$, $\vec{H}$, являются производными от компонент четырехмерных величин, а это свидетельствует о том, что они являются компонентами тензора второго ранга в пространстве Минковского. Последнее приводит к тому, что такие понятия, как *электрическая и магнитная напряженность*, не являются абсолютными.

§ 9. Релятивистская механика Пуанкаре

В параграфе третьем мы убедились в том, что требование выполнения принципа относительности для электродинамики приводит к тому, что переход от одной инерциальной системы координат к другой, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью v , осуществляется не преобразованиями Галилея (2.5), а преобразованиями Лоренца (3.1). Отсюда с необходимостью следует, что уравнения механики должны быть изменены так, чтобы они были форминвариантными относительно преобразований Лоренца. Поскольку пространство-время четырехмерно, физические величины, описываемые векторами, будут иметь четыре компоненты. Единственный четырехвектор для точечного тела имеет вид

$$U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (9.1)$$

Здесь интервал $d\sigma$ в галилеевых координатах равен

$$(d\sigma)^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (9.2)$$

Подставляя выражение для $d\sigma$ в (9.1), получим

$$U^0 = \gamma, \quad U^i = \gamma \frac{v^i}{c}, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (9.3)$$

Этот четырехвектор скорости впервые был введен Пуанкаре [3].

Введем теперь четырехвектор импульса

$$P^\nu = mcU^\nu, \quad (9.4)$$

где m — масса покоя точечного тела.

Релятивистские уравнения механики интуитивно можно записать в форме

$$mc^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} = F^\nu, \quad (9.5)$$

здесь F^ν – четырехвектор силы, который нам еще предстоит выразить через обычную силу Ньютона $\vec{f}$. Легко убедиться, что четырехсила (9.5) ортогональна четырехскорости, т. е.

$$F^\nu U_\nu = 0.$$

На основании (9.2) и (9.3) уравнение (9.5) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (9.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.7)$$

Поскольку из принципа соответствия при малых скоростях уравнение (9.6) должно совпадать с уравнением Ньютона, то естественно определить $\vec{F}$ следующим образом

$$\vec{F} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (9.8)$$

здесь $\vec{f}$ – обычная трехмерная сила.

Установим теперь, что уравнение (9.7) является следствием уравнения (9.6). Умножая уравнение (9.6) на скорость $\vec{v}$ и дифференцируя по времени, получим

$$\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \vec{f} \vec{v}. \quad (9.9)$$

С другой стороны, после дифференцирования по времени уравнение (9.7) принимает вид

$$\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = cF^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.10)$$

Сравнивая (9.9) и (9.10), находим

$$F^0 = \frac{\left(\frac{\vec{v}}{c} \vec{f}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.11)$$

На основании соотношений (9.8) и (9.11) уравнения релятивистской механики принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{f}, \quad (9.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{f} \vec{v}. \quad (9.13)$$

Эти уравнения впервые получил А. Пуанкаре [3]. Уравнение (9.13) связывает изменение энергии частицы с совершенной работой в единицу времени.

Получив эти уравнения, Пуанкаре применил их для объяснения аномалии в движении Меркурия. В этой связи он писал:

“Таким образом, новая механика стоит еще пока на зыбкой почве. Ей следует, поэтому, пожелать новых подтверждений. Посмотрим же, что

дают нам в этом отношении астрономические наблюдения. Скорости планет, без сомнения, относительно очень малы, но зато астрономические наблюдения обладают большой степенью точности и простираются на длинные промежутки времени. Небольшие действия могут, стало быть, склониться в такой степени, что приобретут значение величины, допускающей оценку. Единственное действие, относительно которого и можно было ожидать, что оно будет нам заметным, мы видим на самом деле; я имею в виду возмущения самой быстрой из всех планет – Меркурия. Она обнаруживает в действительности такие аномалии в своем движении, которые и по сию пору не могли быть объяснены небесной механикой. Движение ее перигелия гораздо значительнее вычисленных на основании классической теории. Немало трудов было затрачено с целью объяснить эти отклонения... Новая механика несколько исправляет ошибку в теории движения Меркурия, доведя ее до 32'', но не дает полного соответствия между наблюдением и вычислением. Этот результат, таким образом, не говорит в пользу новой механики, но отсюда, во всяком случае, еще не следует, что он говорит и против нее. Новое учение не находится в прямом противоречии с астрономическими наблюдениями''.

Отсюда видно, сколь осторожен А. Пуанкаре в оценке полученных результатов. Оно и понятно, шло становление теории, а поэтому и требовалась внимательная и многократная экспериментальная проверка ее выводов. Оказалось, что эти уравнения справедливы только при пренебрежении гравитацией. Позднее А. Эйнштейн объяснил аномалию в движении

Меркурия, опираясь на общую теорию относительности, в которой гравитация есть следствие наличия кривизны пространства-времени. Но для объяснения аномалии движения Меркурия Эйнштейну фактически пришлось отказаться от специальной теории относительности и, как следствие, от фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

Из уравнений (9.12) следует, что уравнения классической механики справедливы только тогда, когда скорость v мала по сравнению со скоростью света. Именно из-за приближенного характера уравнений классической механики и возникли преобразования Галилея, которые оставляли неизменными уравнения механики во всех инерциальных системах отсчета.

В трехмерной форме импульс и энергия имеют вид

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad E = p^0 c = \gamma m c^2. \quad (9.14)$$

Из (9.12) и (9.13) следует, что для замкнутой системы энергия и импульс сохраняются. **Как видим из формулы (9.14), энергия E не является инвариантом. Она была и остается инвариантом только относительно трехмерных преобразований координат, являясь в то же время нулевой компонентой четырехмерного вектора импульса в пространстве Минковского.**

Определим в качестве примера энергию системы двух частиц a и b в разных системах отсчета. Для этой цели рассмотрим инвариант

$$\mathcal{V} = (p_a + p_b)^2.$$

В системе отсчета, где одна из частиц

$$\vec{p}_a = 0$$

покоится, имеем

$$\mathcal{V} = 2mE + 2m^2c^2,$$

здесь мы приняли массы частиц a и b одинаковыми. Тот же инвариант в системе отсчета

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0,$$

где центр инерции покоится, равен

$$\mathcal{V} = (p_a + p_b)^2 = 4 \frac{\mathcal{E}^2}{c^2},$$

здесь $\mathcal{E}$ – энергия частицы в этой системе отсчета.

Сравнивая выражения, получим связь между энергиями в этих системах отсчета

$$E = 2 \frac{\mathcal{E}^2}{mc^2} - mc^2.$$

Энергия столкновения двух частиц наиболее эффективно используется в том случае, когда центр инерции двух частиц покоится в лабораторной системе отсчета. Это и реализуется в ускорителях на встречных пучках. Именно в них не тратится энергия на движение центра инерции системы.

Тот, кто почувствовал четырехмерность пространства-времени, сразу мог бы увидеть, что энергия и импульс объединены в четырехимпульс. Более того, он понял бы, что они подчиняются для замкнутой системы закону сохранения энергии и импульса.

А. Эйнштейн в 1905 г. для объяснения фотоэффекта высказал мысль о существовании квантов энергии света, равных $\hbar\omega$. Если бы он глубоко понимал наличие и значение группы, а следовательно, требование принципа относительности – четырехмерности векторных физических величин, он мог бы, наряду с квантом энергии света, сразу ввести и квант импульса света. Тем более, что к тому времени было экспериментально доказано (П. Н. Лебедев, 1901 г.), что свет переносит не только энергию, но и импульс, оказывая давление на твердые тела.

Однако А. Эйнштейн этого не сделал. Квант импульса света ввел в 1909 г. Штарк. Он учел это в законе сохранения импульса. Так возник квант света (как частица) – **фотон**.

Энергия и импульс согласно (9.4) при преобразованиях Лоренца изменяются следующим образом

$$p'_x = \gamma \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \gamma(E - vp_x).$$

Монохроматическая плоская световая волна характеризуется частотой ω и волновым вектором $\vec{K} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$, которые являются компонентами четырехмерного волнового вектора

$$K^\nu = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \vec{n} \right).$$

Квадрат четырехмерного волнового вектора на основании волнового уравнения равен нулю

$$K^\nu K_\nu = 0,$$

что означает равенство нулю массы покоя.

При преобразованиях Лоренца частота ω/c и волновой вектор $\vec{K}$ изменяются так же, как $ct, \vec{x}$, т. е.

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \gamma \left(1 - \frac{v}{c} n_x \right), \\ \omega' n'_x &= \omega \gamma \left(n_x - \frac{v}{c} \right), \\ \omega' n'_y &= \omega n_y, \quad \omega' n'_z = \omega n_z. \end{aligned}$$

Такие же формулы сохраняются и для **фотона**, масса покоя которого равна нулю. Четырехимпульс фотона равен

$$p^\nu = \left(\frac{\hbar \omega}{c}, \hbar \vec{K} \right),$$

здесь $\hbar$ – постоянная Планка.

Отсюда очевидно, что энергия E и частота ω преобразуются одинаковым образом. Вышеприведенные формулы объясняют **эффект Допплера**, заключающийся в изменении частоты света, испущенного движущимся источником. **Эффект Допплера** имеет место и в том случае, когда направление движения источника света перпендикулярно направлению наблюдения ($n'_x = 0$). Поскольку

$$\omega = \omega' \gamma \left(1 + \frac{v}{c} n'_x \right),$$

для поперечного **эффекта Допплера** получаем формулу

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - v/c^2}.$$

Этот эффект по сравнению с продольным достаточно мал. Из предыдущих формул можно также определить, как изменяется направление светового луча при переходе к другой инерциальной системе отсчета

$$n'_x = \frac{n_x - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} n_x}.$$

Эта формула выражает явление **абберации**. К этому вопросу мы вернемся в § 16.

Ковариантный вектор четырехскорости равен $U_\nu = U^\sigma \gamma_{\sigma\nu}$, но поскольку в галилеевых координатах $\gamma_{\sigma\nu} = (1, -1, -1, -1)$, получим

$$U_\nu = (U^0, -U^i). \quad (9.15)$$

Учитывая (9.1) и (9.15), можно составить инвариант

$$U_\nu U^\nu = (U^0)^2 - (\vec{U})^2 = 1, \quad (9.16)$$

который в силу определения четырехвектора U^ν будет равен единице. Это легко проверить, если подставить значения, определяемые формулами (9.3), в (9.16). Таким образом, имеем

$$p_\nu p^\nu = (mc)^2, \text{ или } E = c \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (9.17)$$

В формуле (9.17) мы удержали для энергии только положительный знак, однако отрицательный знак энергии также имеет смысл. Он оказывается существенным при объединении теории относительности с квантовыми представлениями. Это привело Дирака к предсказанию частицы (позитрона) с массой электрона и положительным зарядом, равным по величине заряду электрона. Возникли представления о рождении “элементарных” частиц (В. Амбарцумян, Д. Иваненко, Э. Ферми) в процессе взаимодействия, о физическом вакууме, античастицах. Это открыло возможность превращения **кинетической энергии** сталкивающихся частиц в **материальную субстанцию**, имеющую **массу покоя**. Так возникла необходимость создания ускорителей на высокие энергии для изучения тайн микромира.

С учетом (9.14) уравнение (9.12) принимает форму

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c^2} \vec{v} \right) = \vec{f}, \text{ или } \frac{E}{c^2} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{dE}{dt}. \quad (9.18)$$

Из (9.18) следует, что ускорение тела, определяемое выражением $\frac{d\vec{v}}{dt}$, не совпадает с направлением действующей силы $\vec{f}$. Из уравнений релятивистской механики Пуанкаре на основании (9.17) для тела, находящегося в состоянии покоя, имеем

$$E_0 = mc^2,$$

здесь E_0 – энергия покоящегося тела, m – масса тела.

Из (9.17) очевидно, что масса m является инвариантом. Это соотношение является точным следствием псевдоевклидовой структуры геометрии пространства-времени. Соотношение между энергией и массой возникло вначале в связи со свойством инерции электромагнитного излучения. Впервые в статье Пуанкаре 1900 г. в ясной и четкой форме найдена формула $E = mc^2$ для излучения.

Приведем ниже выдержки из статьи Пуанкаре 1900 г. “Теория Лоренца и принцип равенства действия и противодействия” (перевод с французского осуществлен В.А. Петровым):

“Прежде всего напомним вкратце расчет, который устанавливает, что в теории Лоренца принцип равенства действия и противодействия более несправедлив, по крайней мере когда его применяют только к веществу.

Будем искать результирующую всех ponderomotorных сил, примененных ко всем электронам, расположенным внутри определенного объема. Эта результирующая дается интегралом

$$\vec{F} = \int \rho dV \left(\frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}] + \vec{E} \right),$$

где интегрирование идет по элементам dv рассматриваемого объема, и где $\vec{v}$ – скорость электрона.

В силу уравнений

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot } \vec{H}, \\ 4\pi \rho &= \text{div } \vec{E}, \end{aligned}$$

и добавляя и вычитая член $\frac{1}{8\pi} \nabla H^2$, я могу написать

$$\vec{F} = \sum_1^4 \vec{F}_i,$$

где

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi c} \int dV \left[\vec{H} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right],$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi} \int dV (\vec{H} \nabla) \vec{H},$$

$$\vec{F}_3 = -\frac{1}{8\pi} \int dV \nabla H^2,$$

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{4\pi} \int dV \vec{E} (\operatorname{div} \vec{E}).$$

Интегрирование по частям дает:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \vec{H} (\vec{n} \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} \int dV \vec{H} (\operatorname{div} \vec{H}),$$

$$\vec{F}_3 = -\frac{1}{8\pi} \int d\sigma \vec{n} H^2,$$

где интегралы идут по всем элементам $d\sigma$ поверхности, которая ограничивает рассматриваемый объем, и где $\vec{n}$ обозначает нормаль к этому элементу. Если учесть, что

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

то можно записать:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \left(2\vec{H} (\vec{n} \vec{H}) - \vec{n} H^2 \right). \quad (A)$$

Преобразуем теперь $\vec{F}_4$. Интегрирование по частям дает

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma \vec{E} (\vec{n} \vec{E}) - \frac{1}{4\pi} \int dV (\vec{E} \nabla) \vec{E}.$$

Назовем $\vec{F}_4'$ и $\vec{F}_4''$ два интеграла из правой части так, что

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_4' - \vec{F}_4''.$$

Если учесть уравнения:

$$[\nabla \vec{E}] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

мы можем записать

$$\vec{F}_4'' = \vec{Y} + \vec{Z},$$

где

$$\begin{aligned}\vec{Y} &= \frac{1}{8\pi} \int dV \nabla E^2, \\ \vec{Z} &= \frac{1}{4\pi c} \int dV \left[\vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right].\end{aligned}$$

Вследствие этого найдем, что

$$\begin{aligned}\vec{Y} &= \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \vec{n} E^2, \\ \vec{F}_1 - \vec{Z} &= \frac{d}{dt} \int \frac{dV}{4\pi c} [\vec{H} \vec{E}].\end{aligned}$$

Наконец имеем

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \int \frac{dV}{4\pi c} [\vec{H} \vec{E}] + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) + (\vec{F}_4' - \vec{Y}),$$

где $(\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$ дается формулой А, тогда как

$$\vec{F}_4' - \vec{Y} = \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \left(2\vec{E}(\vec{n}\vec{E}) - \vec{n}E^2 \right).$$

Член $(\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$ представляет собой давление, испытываемое различными элементами $d\sigma$ поверхности, которая ограничивает рассматриваемый объем. Сразу же видно, что это давление – не что иное, как **магнитное давление** Максвелла, введенное этим ученым в хорошо известной теории. Точно также член $(\vec{F}_4 - \vec{Y})$ представляет действие электростатического давления Максвелла. В отсутствии первого члена

$$\frac{d}{dt} \int dV \frac{1}{4\pi c} [\vec{H} \vec{E}]$$

пондеромоторная сила была бы не чем иным, как результатом максвелловских давлений. Если наши интегралы распространяются на все пространство, то силы $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ и $\vec{Y}$ исчезают, и остается просто

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \int \frac{dV}{4\pi c} [\vec{H} \vec{E}].$$

Если обозначим через M массу одной из рассматриваемых материальных точек, $\vec{v}$ – ее скорость, то мы имели бы, если бы принцип равенства действия и противодействия был применим:

$$\sum M\vec{v} = \text{const.}^3$$

Мы же, напротив, будем иметь:

$$\sum M\vec{v} - \int \frac{dV}{4\pi c} [\vec{H} \vec{E}] = \text{const.}$$

Заметим, что

$$-\frac{c}{4\pi} [\vec{H} \vec{E}]$$

это вектор излучения Пойнтинга.

³Здесь имеется ввиду только вещество. – А. Л.

Если положить:

$$J = \frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2),$$

то уравнение Пойнтинга дает:

$$\int \frac{dJ}{dt} dV = - \int d\sigma \frac{c}{4\pi} \vec{n} [\vec{H} \vec{E}] - \int dV \rho (\vec{v} \vec{E}). \quad (B)$$

Первый интеграл справа представляет собой, как известно, количество электромагнитной энергии, которая входит в рассматриваемый объем через поверхность, а второй член представляет собой количество электромагнитной энергии, которое создается внутри объема путем преобразования энергии других видов.

Мы можем рассматривать электромагнитную энергию как фиктивную жидкость, плотность которой есть J и которая распределяется в пространстве согласно законам Пойнтинга. Нужно только допустить, что эта жидкость не является неразрушимой, и что в элементе объема dV она уменьшается в единицу времени на величину $\rho dV \vec{E} \vec{v}$ (или что создается равное и обратное по знаку количество, если это выражение отрицательно); это не дает нам возможности полностью уподобить нашу фиктивную жидкость жидкости реальной. Количество этой жидкости, которая проходит в единицу времени через единичную поверхность, ориентированную перпендикулярно оси i , равно

$$JU_i,$$

при этом U_i — соответствующие составляющие скорости жидкости.

Сравнивая с формулами Пойнтинга, находим

$$J\vec{U} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}];$$

так что наши формулы принимают следующий вид

$$\sum M\vec{v} + \int dV \frac{J\vec{U}}{c^2} = \text{const.}^4 \quad (G)$$

Они показывают, что количество движения собственно вещества плюс количество движения нашей фиктивной жидкости представлено постоянным вектором.

В обычной механике из постоянства количества движения заключают, что движение центра тяжести прямолинейно и равномерно. Но здесь мы

⁴В формуле (G) второй член слева определяет суммарный импульс электромагнитного излучения. Именно здесь и возникает понятие *плотности импульса излучения*

$$\vec{g} = \frac{J}{c^2} \vec{U},$$

а также понятие *плотности массы электромагнитного поля*

$$m = \frac{J}{c^2},$$

здесь J – плотность электромагнитной энергии. Отсюда видно также, что плотность потока энергии излучения

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$$

связана с плотностью импульса

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}.$$

Так возникли локальные понятия *энергии* и *импульса*. Все это впервые получил А. Пуанкаре. Позднее эти вопросы обсуждались в работе Планка (Phys. Zeitschr. 1908. 9. S. 828) – А. Л.

не имеем права заключить, что центр тяжести системы, образованной веществом и нашей фиктивной жидкостью, движется прямолинейно и равномерно; это потому, что эта жидкость не является неуничтожимой.

Положение центра тяжести фиктивной жидкости зависит от величины интеграла

$$\int \vec{x} J dV,$$

взятого по всему пространству. Производная от этого интеграла есть

$$\int \vec{x} \frac{dJ}{dt} dV = - \int \vec{x} \operatorname{div}(J \vec{U}) dV - \int \rho \vec{x} (\vec{E} \vec{v}) dV.$$

Однако первый интеграл из правой части после интегрирования переходит в

$$\int J \vec{U} dV$$

или

$$(\vec{C} - \sum M \vec{v}) c^2,$$

если через $\vec{C}$ обозначена постоянная сумма векторов из уравнения (G).

Обозначим через M_0 полную массу вещества, через $\vec{R}_0$ — координаты ее центра тяжести, через M_1 — полную массу фиктивной жидкости, через $\vec{R}_1$ — ее центр тяжести, через M_2 — полную массу системы (вещество + фиктивная жидкость), через $\vec{R}_2$ — ее центр тяжести так, что имеем:

$$M_2 = M_0 + M_1, \quad M_2 \vec{R}_2 = M_0 \vec{R}_0 + M_1 \vec{R}_1,$$

$$\int \vec{x} \frac{J}{c^2} dV = M_1 \vec{R}_1.^5$$

Тогда приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}(M_2 \vec{R}_2) = \vec{C} - \int \vec{x} \frac{\rho(\vec{v} \vec{E})}{c^2} dV. \quad (D)$$

Уравнение (D) можно выразить на обычном языке следующим образом. Если нигде нет создания или уничтожения электромагнитной энергии, то последний член исчезает, тогда как центр тяжести системы, образованной веществом и электромагнитной энергией (рассматриваемой как фиктивная жидкость) обладает прямолинейным и равномерным движением”.

Далее А. Пуанкаре пишет:

“Электромагнитная энергия таким образом с нашей точки зрения ведет себя как жидкость, снабженная инерцией, и должно заключить, что если некий прибор, произведя электромагнитную энергию, посылает ее посредством излучения в определенном направлении, то и этот прибор должен испытать отдачу, как пушка, которая выпустила снаряд. Конечно, этой отдачи не будет, если прибор испускает энергию одинаково во все стороны; напротив, она будет иметь место, если эта симметрия не существует, и если электромагнитная энергия испущена в одном – единственном направлении, точно так же, как происходило,

⁵В этой формуле Пуанкаре также использует ранее введенное понятие плотности массы электромагнитного поля. – А. Л.

например, в случае излучателя Герца, помещенного внутри параболического зеркала. Легко численно оценить величину этой отдачи. Если прибор имеет массу 1 кг, и если он посылает в одном единственном направлении со скоростью света три миллиона джоулей, то скорость благодаря отдаче есть 1 см/сек”.

При определении скорости отдачи А. Пуанкаре опять использует формулу

$$M = \frac{E}{c^2}.$$

В § 7 статьи [3] Пуанкаре получает уравнения релятивистской механики. Если в этом параграфе перейти от системы единиц $M = 1, c = 1$ к гауссовой системе, то легко установить, что **инертная масса тела** также определяется формулой

$$M = \frac{E}{c^2}.$$

Таким образом, из работ А. Пуанкаре следует, что **инертная масса как вещества, так и излучения** определяется энергией. Все это явилось следствием электродинамики и релятивистской механики.

В 1905 г. Эйнштейн опубликовал статью “Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?”. Относительно этой статьи Макс Джеммер в книге “Понятие массы в классической и современной физике” (М.: Прогресс, 1967. С. 182) написал:

«Обычно говорят, что с полной общностью теорема об инертности впервые была установлена Эйнштейном в 1905 г. (Макс Борн “Атомная физика”. М., 1965. С. 72), при этом ссылаются

на статью Эйнштейна “Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?”. На основе уравнений электромагнитного поля Максвелла-Герца Эйнштейн утверждает, что “если тело отдает энергию E в виде излучения, то его масса уменьшается на E/c^2 ”. Обобщая этот результат на все энергетические превращения, Эйнштейн заключает: “Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии”. Курьезным случаем в истории научного мышления является тот факт, что собственный вывод Эйнштейном формулы $E = mc^2$, как он дан в его статье “Annalen der Physik” был логически ошибочным. Действительно то, что для неспециалиста известно как наиболее знаменитая математическая формула из когда-либо открытых в науке (William Cahn “Einstein, a pictorial biography”. New York: Citadel, 1955. P. 26), было лишь результатом *petiti principia*, т. е. аргументом, основанным на выводе из положения, которое само еще требует доказательства».

“...Логическая необоснованность вывода Эйнштейна была показана Айвсом (Journal of the Optical Society of America. 1952. 42. P. 540-543)”.

Остановимся кратко на работе А. Эйнштейна 1905 г. “Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?” А. Эйнштейн пишет:

“Пусть в системе (x, y, z) находится покоящееся тело, энергия которого, отнесенная к системе (x, y, z) , равна E_0 . Энергия же этого тела, отнесенная к системе (ζ, η, ς) , движущейся со скоростью v , пусть равна H_0 . Пусть это тело посылает в направлении, составляющим угол φ с осью x ,

плоскую световую волну с энергией $L/2$ (измеренной относительно системы (x, y, z)) и одновременно посылает такое же количество света в противоположном направлении. При этом тело остается в покое относительно системы (x, y, z) . Для этого процесса должен выполняться закон сохранения энергии и притом (согласно принципу относительности) по отношению к обеим координатным системам. Если мы обозначим через E_1 энергию тела после излучения света при измерении ее относительно системы (x, y, z) и соответственно через H_1 энергию относительно системы (ζ, η, ς) , то, пользуясь полученным выше соотношением, находим

$$E_0 = E_1 + \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right),$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] =$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\}. \quad (N)$$

Все дальнейшее А. Эйнштейн старается получить именно из этого соотношения. Проведем элементарный анализ полу-

ченного им равенства. Согласно теории относительности

$$H_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad H_1 = \frac{E_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Наличие таких формул, по-видимому, Эйнштейн не увидел. Отсюда имеем

$$H_0 - E_0 = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad H_1 - E_1 = E_1 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

а следовательно, левая часть равенства Эйнштейна равна

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = (E_0 - E_1) \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right);$$

тогда равенство (N) принимает очевидный вид

$$E_0 - E_1 = L.$$

Таким образом, из исходного равенства Эйнштейна (N) ничего более содержательного получить нельзя. В этой работе А. Эйнштейну не удалось найти ни физических аргументов, ни методики вычислений, чтобы доказать, что хотя бы для излучения справедлива формула

$$M = \frac{E}{c^2}.$$

Так что критика Айвса работы Эйнштейна справедлива. В 1906 г. Эйнштейн вновь возвращается к этому вопросу, но его работа, как он отмечает сам, повторяет исследования А. Пуанкаре 1900 г.

Позднее, Планк в 1907 г. и Ланжевен в 1913 г. раскрывают на этой основе роль внутренней энергии взаимодействия тела (энергии связи), которая и **приводит к дефекту массы, создающему условия для возможного выделения энергии, например, при делении и синтезе атомных ядер**. Релятивистская механика стала инженерной дисциплиной. С ее помощью сооружены многочисленные ускорители элементарных частиц.

Появляющиеся иногда “опровержения” специальной теории относительности порой связаны с неясным и неточным изложением ее основ во многих учебниках. Часто ее смысл глубоко скрыт за обилием излагаемых второстепенных, а порой и ненужных, элементов. Специальная теория относительности в своей основе удивительно проста, почти так же, как геометрия Евклида.

О преобразованиях силы

Согласно (9.8) и (9.11) четырехсила равна

$$F^\nu = \left(\gamma \frac{\vec{v} \vec{f}}{c}, \gamma \vec{f} \right), \quad (9.19)$$

$$F_\nu = \left(\gamma \frac{\vec{v} \vec{f}}{c}, -\gamma \vec{f} \right). \quad (9.20)$$

Как мы отмечали ранее, сила как четырехвектор преобразуется так же, как величины ct и x . Поэтому

$$f'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \gamma_1 \left(f_x - \beta \frac{\vec{v} \vec{f}}{c} \right), \quad (\vec{v}' \vec{f}') = \frac{\gamma}{\gamma'} \gamma_1 (\vec{v} \vec{f} - c\beta f_x), \quad (9.21)$$

$$f'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} f_y, \quad f'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} f_z. \quad (9.22)$$

Здесь

$$\beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad u - \text{скорость вдоль оси } x. \quad (9.23)$$

Пусть в нештрихованной инерциальной системе координат имеются две частицы с четырехскоростями

$$U_1^\nu = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right), \quad U_2^\nu = \left(\gamma_1, \gamma_1 \frac{\vec{u}}{c} \right). \quad (9.24)$$

Тогда в инерциальной системе отсчета, где вторая частица покоится, мы будем иметь следующие выражения для соответствующих четырехвекторов

$$U_1^{\nu'} = \left(\gamma', \gamma' \frac{\vec{v}'}{c} \right), \quad U_2^{\nu'} = (1, 0).$$

Отсюда, на основании инвариантности выражения $U_{1\sigma} U_2^\sigma$, имеем следующее равенство

$$\gamma' = \gamma \gamma_1 \left(1 - \frac{\vec{v} \vec{u}}{c^2} \right). \quad (9.25)$$

Таким образом, получим

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma_1 \left(1 - \frac{\vec{v} \vec{u}}{c^2} \right)}. \quad (9.26)$$

Для нашего случая, когда скорость $\vec{u}$ направлена вдоль оси x , имеем

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\gamma_1 \left(1 - \frac{v_x u}{c^2} \right)}. \quad (9.27)$$

Подставляя (9.27) в (9.21) и (9.22), получим

$$f'_x = \frac{f_x - \beta \frac{\vec{v}}{c} \vec{f}}{1 - \beta \frac{v_x}{c}}, \quad f'_y = \frac{f_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \frac{v_x}{c}}, \quad f'_z = \frac{f_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \frac{v_x}{c}}, \quad (9.28)$$

$$\vec{f}'\vec{v}' = \frac{(\vec{f}\vec{v}) - \beta c f_x}{1 - \beta \frac{v_x}{c}}. \quad (9.29)$$

Отсюда очевидно, что если сила $\vec{f}$ в некоторой инерциальной галилеевой системе координат равна нулю, то она равна нулю и в любой другой инерциальной системе координат. Это означает, что если закон инерции имеет место в одной инерциальной системе, то он выполняется и в любой другой инерциальной системе. Более того, вывод о силе справедлив не только для инерциальной системы координат, но и для любой ускоренной (неинерциальной) системы координат. **Сила не может возникнуть вследствие координатных преобразований.** Если движение по инерции в инерциальной системе координат происходит по прямой линии, то в неинерциальной системе свободное движение будет идти по геодезической линии, которая в этих координатах уже не будет линейной функцией от времени.

В классической механике сила $\vec{f}$ одинакова во всех инерциальных системах отсчета, в релятивистской механике это уже не так, компоненты силы в этом случае изменяются согласно (9.28).

Остановимся на общем замечании относительно инерциальных систем отсчета. Равноправность инерциальных систем отсчета состоит в том, что если мы в каждой системе отсчета будем создавать одинаковые условия для эволюции материи, то, естественно, должны получить в каждой системе одно и то же описание явления, иначе говоря, мы не сможем выделить какую-либо из инерциальных систем отсчета. Но если мы создали условия для движения материи в какой-нибудь одной инерциальной системе отсчета, то при описании того, что происходит в этой системе при наблюдении из любой другой инерциальной системы, мы получим уже другую картину, отличную от описания в исходной системе отсчета. Это не нару-

шает равноправности инерциальных систем, поскольку в этом случае исходная система выделена самой постановкой задачи. Именно такая ситуация возникает, когда мы рассматриваем Вселенную. В этом случае во Вселенной существует одна физически выделенная инерциальная система отсчета, которая определяется по распределению материи. В этой системе отсчета время будет выделено по сравнению с другими инерциальными системами. Это время можно было бы назвать “истинным временем” Вселенной. В качестве примера выделенной системы отсчета можно было бы выбрать систему отсчета, в которой реликтовое электромагнитное излучение однородно и изотропно (см. об этом [5]).

Из предыдущего изложения, особенно из параграфов 3, 5, 7, 8 и 9, очевидно, что Анри Пуанкаре открыл все основное, что составляет содержание специальной теории относительности. В этом может убедиться каждый, окончивший университет по специальности теоретическая физика и внимательно прочитавший, по крайней мере, две его статьи “О динамике электрона”.

Имеются и другие точки зрения: *“Пуанкаре не сделал решающего шага”* (де Бройль), *“Пуанкаре был, по-видимому, довольно близок к созданию СТО, но до конца не дошел. Почему так произошло, можно только гадать”* (В.Л. Гинзбург). Но высказывания этих авторов характеризуют не уровень выдающихся достижений А. Пуанкаре по теории относительности, а их собственный уровень понимания проблемы. Удивляет, что авторы высказываний свое непонимание или трудность понимания, испытанную ими, превращают (без тени сомнения) в критерий оценки выдающегося исследования Пуанкаре. В данном случае не нужно “гадать”. Необходимо было только внимательно прочитать работы Пуанкаре [2; 3] и подумать.

Профессор А. Пайс в книге “Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна”, опубликованной в издательстве “Наука” в 1989 г., написал (С. 162):

“... Ясно видно, что даже в 1909 г. Пуанкаре не знал, что сокращение размеров стержней является следствием двух постулатов Эйнштейна. (выделено мной. – А. Л.) Отсюда следует, что Пуанкаре не понял одного из фундаментальнейших положений СТО”.

Сразу отметим, подчеркнутое – неверно. Но об этом позднее.

Из всего того, что написал А. Пайс очевидно, что он сам **не понял** основ специальной теории относительности. Поясню. Пуанкаре показал неизменность уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца, что соответствовало требованию принципа относительности, сформулированному Пуанкаре в 1904 г. для всех физических явлений природы. Как мы уже отмечали, А. Пуанкаре открыл фундаментальный инвариант (3.22)

$$J = c^2 T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2,$$

устанавливающий геометрию пространства-времени. Именно отсюда следует, что принцип постоянства скорости света есть частное следствие этого выражения, когда инвариант J равен нулю. Профессору Пайсу необходимо было понять, что сокращение Лоренца связано с отрицательным J , т. е. пространственноподобным значением J , а не нулевым. В свою очередь замедление времени связано с положительным J , т. е. времениподобным J , но отнюдь не нулевым. Таким образом, из предыдущего очевидно, что **сокращение размеров стержней не является следствием только двух постулатов Эйнштейна**. Вот к чему приводит поверхностное знание основ теории относительности.

С таким вот знанием материала профессор Пайс стремился доказать на страницах своей книги, что А. Пуанкаре не сделал решающего шага в создании теории относительности! Свою точку зрения о вкладе Пуанкаре он, физик, “подкрепил” еще

и решением парижской сессии Французского философского общества в 1922 г.

Как все просто! Собрались философы и решили, а статьи Пуанкаре по теории относительности, по-видимому, и не изучали. Но изучение их требует соответствующего профессионального уровня. Сомнительно, чтобы их профессиональный уровень был выше уровня профессора Пайса в данном вопросе. Несмотря на критику, надо сказать, что профессор Пайс был замечательным ученым, и ему принадлежит ряд выдающихся исследований.

Что касается сокращения Лоренца, то в статье [3] (§ 6. “Сокращение электронов”) А. Пуанкаре подробно рассматривает этот вопрос, используя преобразования Лоренца. Все это отчетливо изложено в статье [3]. Именно объединение принципа относительности с электродинамикой Максвелла-Лоренца и позволило Пуанкаре в статьях [2] и [3] сформулировать основы специальной теории относительности. Что касается постулата о постоянстве скорости света, то он проявился как простой эвристический прием, а не как исходное положение теории. Он является следствием требования принципа относительности к электродинамическим явлениям, которые описываются уравнениями Максвелла-Лоренца в галилеевых координатах.

Профессор А. Пайс, отмечая групповые преобразования Лоренца, пишет (см. с. 128 вышеуказанной его книги):

“Пуанкаре, конечно, не подозревал, что кто-то другой (имеется ввиду А. Эйнштейн. – А.Л.) за несколько недель до него уже отметил групповые свойства преобразований Лоренца...”

Но все это **абсолютно неверно**. Статья [2] А. Пуанкаре появилась в “Докладах Французской академии наук” 5 июня 1905 г., тогда как статья А. Эйнштейна была послана в печать 30 июня 1905 г.

А. Пуанкаре открыл группу и назвал ее **группой Лоренца**. Он писал в статье [2]:

“Все эти преобразования вместе со всеми вращениями должны образовывать группу”.

В статьях [2; 3] А. Пуанкаре групповые свойства широко используются для построения четырехмерных физических величин, обеспечивающих инвариантность уравнений электродинамики относительно группы Лоренца. Тогда как в статье Эйнштейна сказано только следующее:

“Отсюда видно, что такие параллельные преобразования, как это и должно быть, образуют группу”.

О группе в статье Эйнштейна – больше ни слова. Отсюда, естественно, и его непонимание, что электродинамические величины должны преобразовываться по группе, чтобы обеспечить инвариантность уравнений в соответствии с принципом относительности. Но это приводит к тому, что некоторые физические величины становятся четырехмерными, например, ток, потенциалы, импульс, сила.

Поразительные “открытия” делают и некоторые историки от науки. Вот, например, один из таких “шедевров творчества”. С. Голдберг в своей статье написал (Эйнштейновский сборник 1972. М.: Наука, 1974. С. 354. См. также: The British Journal for the History of Science. 1970. Vol. V. № 17. P. 73):

“Пуанкаре придерживался в своих работах представления об абсолютном пространстве независимо от того, доступно оно для наблюдения или нет ...”

“... По мнению Пуанкаре, была одна привилегированная система отсчета, в которой скорость света действительно была постоянной; такая система была единственной”.

Приписывание С. Голдбергом всего этого Пуанкаре не имеет под собой никаких оснований. Так, еще в 1902 г. в книге “Наука и гипотеза” А. Пуанкаре писал:

*“Абсолютного пространства не существует;
мы познаем только относительные движения”.*

“Не существует абсолютного времени”.

В 1904 г. Пуанкаре сформулировал принцип относительности для всех физических явлений (см. наст. изд., с. 25) и в 1905 г. установил в соответствии с принципом относительности, что уравнения электромагнитного поля, благодаря преобразованиям Лоренца, остаются одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета.

Таким образом обеспечивается равенство и постоянство скорости света в любой инерциальной системе отсчета. Все это изложено в статьях А. Пуанкаре [2; 3], которые и следовало бы внимательно изучить С. Голдбергу, прежде чем писать о мнении Пуанкаре.

При оценке работ [2] и [3], а также ранних работ А. Пуанкаре по физике необходимо исходить только из их содержания, сравнивая с современными представлениями, а не руководствоваться высказываниями по этому поводу даже крупных ученых, современников Пуанкаре, поскольку уровень многих из них был недостаточен, чтобы в полной мере осознать то, о чем писал Пуанкаре. В то время индивидуальность его личности особенно проявлялась в том, что для него физические проблемы и их адекватная математическая формулировка естественно объединялись и составляли единое целое. Именно поэтому его творения точны и современны и через сто лет. А. Пуанкаре относился к редкому типу исследователей, для которых естествознание и математика были родной стихией. Для современной молодежи, подготовленной по теоретической физике, легко в этом убедиться, прочитав хотя бы

его работы [2] и [3]. В случае с высказываниями профессора А. Пайса и доктора С. Голдберга мы опять сталкиваемся с тем же, что и ранее – стремлением свое непонимание перенести на автора.

Некоторые авторы, желая подчеркнуть предшествующий характер статей Пуанкаре [2; 3] по созданию теории относительности, приводят следующие два высказывания из книги В. Паули “Теория относительности” (С. 17), написанной им в 1921 г. еще в молодом возрасте:

“Основы новой теории были доведены до известного завершения Эйнштейном”.

“Исследования Эйнштейна содержат не только все существенные результаты обеих названных работ, но также прежде всего изложение нового и глубокого понимания всей проблемы”.

Ниже мы приведем высказывание В. Паули по этому же вопросу, но относящееся уже к 1955 г.

Относительно первого высказывания Паули следует сказать, что никакого дальнейшего завершения работ [2], [3] Пуанкаре не требуется. В них в предельно точной форме сформулировано все основное, что является содержанием теории относительности.

Что касается второго высказывания Паули, то ситуация как раз обратная; достаточно сравнить содержание работ Пуанкаре и Эйнштейна, чтобы убедиться, что статьи Пуанкаре [2; 3] содержат не только все основное из статьи Эйнштейна 1905 г. (причем, в отличие от Эйнштейна, Пуанкаре все сформулировал в точной форме), но также содержат в основных частях и более позднюю работу Минковского. Что касается слов Паули относительно “глубокого понимания всей проблемы”, то оно как раз и имеется в статьях Пуанкаре. Вот например:

“...все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованиям Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы”.

Иначе говоря, лоренц-инвариантность универсальна. Все это относится в полной мере и к гравитационным силам.

Далее, Пуанкаре открыл псевдоевклидову геометрию пространства-времени, установил четырехмерность физических величин. Он построил уравнения релятивистской механики, предсказал существование гравитационных волн, движущихся со скоростью света. Тогда о каком *“глубоком понимании всей проблемы”* могла еще идти речь?

Вызывает удивление высказывание Луи де Бройля в 1954 г.:

“Еще немного и Анри Пуанкаре, а не Альберт Эйнштейн первым построил бы теорию относительности во всей общности, доставив тем самым французской науке честь этого открытия. ...Однако Пуанкаре так и не сделал решающего шага и предоставил Эйнштейну честь разглядеть все следствия из принципа относительности и, в частности, путем глубокого анализа измерений длины и времени выяснить подлинную физическую природу связи, устанавливаемой принципом относительности между пространством и временем”.

Все это совсем не так, как пишет Луи де Бройль. А. Пуанкаре еще в статье 1898 г. “Измерение времени” дал подробный анализ измерения времени, в том числе и с помощью светового сигнала. Далее, в статьях 1900 и 1904 гг. он описывает процедуру **определения одновременности** в разных точках пространства с помощью светового сигнала в движущейся инерциальной системе отсчета и, тем самым, раскрывает физический смысл **местного времени** Лоренца. В 1904 г.

в статье [1] он впервые сформулировал принцип относительности для всех физических явлений. В 1905 г., опираясь на статью Г. Лоренца, А. Пуанкаре в статьях [2; 3] открыл группу Лоренца и на этой основе установил, в полном соответствии с принципом относительности, инвариантность уравнений Максвелла-Лоренца относительно преобразований Лоренца. А. Пуанкаре распространил группу Лоренца на все силы природы. Таким образом, лоренц-инвариантность стала универсальной, справедливой и для гравитационных явлений. В статье [3], опираясь на группу Лоренца, он ввел псевдоевклидову геометрию пространства-времени. Так возникло однородное и изотропное пространство-время, определяемое **инвариантом**

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

которое нашло отражение в относительности понятий *времени* и *длины*, проявилось в симметрии физических законов, законах сохранения, в существовании предельной скорости материальных тел, в четырехмерности ряда физических величин. Связь пространства и времени полностью определилась структурой геометрии. Такого глубокого проникновения в суть проблемы в статье А. Эйнштейна нет. Следуя этим представлениям, А. Пуанкаре открыл уравнения релятивистской механики и предсказал существование гравитационных волн, распространяющихся со скоростью света. Таким образом, Пуанкаре вывел из принципа относительности все наиболее общие следствия. **В работе А. Эйнштейна 1905 г. нет ни одной идеи, которая бы не содержалась в статьях А. Пуанкаре.** Да и по части реализации идей работа А. Эйнштейна довольно-таки элементарна. Хотя, на самом деле, реализация идей требовала анализа высокого уровня. В работах А. Пуанкаре [2; 3] дается не только анализ и реализация высокого уровня, но в них имеется также много нового, не содержащегося в статье А. Эйн-

штейна и определившего дальнейшее развитие теории относительности. Как все это не увидел Луи де Бройль, читая статьи А. Пуанкаре? Сравните написанное Луи де Бройлем с тем, что написал В. Паули в 1955 г. (см. наст. изд., с. 140).

Совершенно очевидно, что Луи де Бройль по сути не разобрался в существе проблемы. Хотя, как директору Института имени Анри Пуанкаре, ему бы следовало это сделать.

Опираясь на высказывания Луи де Бройля, академик В. Л. Гинзбург пишет:

“Как нам представляется, позиция де Бройля, относящегося к памяти А. Пуанкаре с глубоким уважением и максимальной благожелательностью, должна рассматриваться как еще одно свидетельство того, что основным автором СТО является А. Эйнштейн”.

Странно все это. Казалось бы все просто: если позволяет квалификация, возьмите статью А. Эйнштейна 1905 г. и статьи А. Пуанкаре, сравните их, и все станет ясно. Именно это и будет детально рассмотрено в лекциях. А что касается высказывания Луи де Бройля, то оно явно свидетельствует о его поверхностном знании статей А. Пуанкаре.

П. А. М. Дирак в 1980 г. (Эйнштейновский сборник 1982-1983. М.: Наука, 1986. С. 218) написал:

“В одном отношении Эйнштейн пошел гораздо дальше Лоренца, Пуанкаре и других, а именно, в допущении, что преобразования Лоренца должны применяться во всей физике, а не только к явлениям, связанным с электродинамикой. Любые физические силы, которые могут быть введены в будущем, должны будут согласовываться с преобразованиями Лоренца”.

Но именно по этому поводу А. Пуанкаре в 1905-1906 гг. в статьях [2; 3] писал:

“...Все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованиям Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательно-му перемещению) точно так же, как электромагнитные силы”.

Сравнивая написанное Пуанкаре с тем, что высказал Дирак, легко убедиться, что все то, что Дирак считал заслугой только Эйнштейна, полностью содержится в статье [2] Пуанкаре. Так что приведенное выше утверждение Дирака: *“В одном отношении Эйнштейн пошел гораздо дальше ... Пуанкаре”* просто несправедливо. Пуанкаре первым распространил преобразования Лоренца на любые силы природы, в том числе и гравитационные.

Вот например, что писал Ричард Фейнман (см. его книгу Характер физических законов. М.: Мир, 1968. С. 97):

“Именно Пуанкаре предложил исследовать, что можно делать с уравнениями, не меняя при этом их вида. Именно ему принадлежит идея обратить внимание на свойство симметрии физических законов”.

А Вольфганг Паули в 1955 г. в связи с 50-летием теории относительности написал:

“И Эйнштейн, и Пуанкаре опирались на подготовительные работы Г.А. Лоренца, весьма близко подошедшего к окончательному результату, но не сумевшего сделать последний решающий шаг. В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл гармонии математическо-

го метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта”.

Сравните написанное В. Паули с тем, что написал Луи де Бройль в 1954 г.

Статьи Анри Пуанкаре [2; 3] исключительно современны как по содержанию, так и по форме и точности изложения. Поистине, они являются жемчужинами теоретической физики.

Вернемся теперь к высказыванию академика В.Л. Гинзбурга (см. наст. изд., с. 97), далее он пишет о принципе относительности:

“... К тому же Лоренц и Пуанкаре понимали этот принцип лишь как утверждение о невозможности заметить равномерное движение тела относительно эфира”.

В отношении Пуанкаре это совсем неправильно. Поясню. В формулировке Пуанкаре этот принцип гласит [1]:

“Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определить, находимся ли мы в подобном движении или нет”.

В этой формулировке принципа относительности слово “эфир” отсутствует. Поэтому утверждение В.Л. Гинзбурга является простым недоразумением. Дадим в этой связи некоторые тривиальные разъяснения. Из формулировки принципа относительности следует, что наблюдатель, совершающий равномерное поступательное движение, может двигаться с любой постоянной скоростью, а поэтому существует бесконечная совокупность равноправных систем отсчета, в которых законы

физических явлений одинаковы. Эта совокупность равноправных систем содержит и систему отсчета, которая принята за неподвижную.

Затем В.Л. Гинзбург продолжает:

“...Перейти отсюда к рассмотрению всех инерциальных систем отсчета как совершенно равноправных (такова современная формулировка принципа относительности) можно без особого труда только в том случае, если понимать преобразования Лоренца как преобразования, соответствующие переходу к движущейся системе отсчета”. (выделено мной. – А. Л.)

Подразумевать, что Пуанкаре не понимал, что преобразования Лоренца соответствуют переходу от “неподвижной” системы отсчета к движущейся системе отсчета также является недоумением. Это тривиально следует из преобразований Лоренца.

Из преобразований Лоренца

$$x' = \gamma(x - \varepsilon t)$$

следует, что начало координат новой системы отсчета

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0$$

движется вдоль оси x со скоростью ε :

$$x = \varepsilon t$$

относительно другой системы отсчета. Таким образом, преобразования Лоренца связывают переменные (t, x, y, z) , относящиеся к одной из систем отсчета, с переменными (t', x', y', z') ,

относящимися к другой системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью ϵ вдоль оси x по отношению к первой. Преобразования Лоренца, образно говоря, заступили на место преобразований Галилея.

Остановимся несколько подробнее на высказывании В.Л. Гинзбурга. Он отмечает, что *“если понимать преобразования Лоренца как преобразования, соответствующие переходу к движущейся системе отсчета”*, то *“можно без особого труда”* перейти к *“рассмотрению всех инерциальных систем отсчета как совершенно равноправных (такова современная формулировка принципа относительности)”*.

Однако это не так. Этого еще недостаточно для выполнения требования принципа относительности. Необходимо установить (и это самое важное), что преобразования Лоренца вместе с пространственными вращениями образуют **группу**. Но этим мы обязаны исключительно Пуанкаре. Только после открытия **группы** и можно сказать, что все физические уравнения остаются неизменными в любой инерциальной системе отсчета; при этом соответствующие физические характеристики изменяются строго по **группе**. Именно только это и обеспечивает выполнение требования принципа относительности.

В связи с высказыванием В.Л. Гинзбурга (см. наст. изд., с. 141) дадим некоторые пояснения. Допустим, что принцип относительности рассматривается как утверждение о невозможности заметить равномерное прямолинейное движение тела относительно эфира. К чему это приведет? Во-первых, отсюда непосредственно следует, что физические уравнения одинаковы как в системе эфира, так и в любой другой системе отсчета, движущейся относительно системы эфира с постоянной скоростью. Неизменность уравнений обеспечивается преобразованиями Лоренца. Во-вторых, так как преобразования Лоренца **образуют группу**, то, следовательно, нельзя отличить одну систему отсчета от другой. Система отсчета эфира вой-

дет в эту совокупность равноправных инерциальных систем отсчета. Тем самым, она теряет смысл неподвижной системы отсчета. Но это приводит к тому, что **эфир**, в понимании Лоренца, **исчезает**.

Очень часто для того, чтобы подчеркнуть, что Пуанкаре не создал теории относительности, приводится его высказывание:

“Важность этого вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц; я стремился только несколько видоизменить и дополнить их”.

Обычно из этих слов делают вывод, что Пуанкаре в точности придерживался точки зрения Лоренца. Но Лоренц, как он сам отмечал, не установил принципа относительности для электродинамики, а поэтому делается вывод, что и Пуанкаре не сделал решающего шага. **Однако это не так.** Авторы, которые об этом пишут не прочли внимательно статьи Пуанкаре [2; 3]. Дадим некоторые разъяснения. Пуанкаре в своей статье [2] пишет:

“Идея Лоренца состоит в том, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторого преобразования (которое я назову именем Лоренца) следующего вида”.

Пуанкаре пишет **“идея Лоренца”**, но Лоренц до Пуанкаре так никогда не писал. Пуанкаре здесь сформулировал свою основополагающую идею, но приписал ее полностью Лоренцу; он, вероятно, как никто другой, всегда крайне высоко ценил и отмечал каждого, кто дал толчок его мысли и доставил радость творчества. Ему были абсолютно чужды личные приоритетные соображения. Но потомки обязаны восстановить справедливость, отдав должное Пуанкаре.

В той же статье академик В.Л. Гинзбург пишет (см. наст. изд.: сноска 1 на с. 53):

“Можно подозревать, что Пуанкаре не считал вклад Эйнштейна особенно значительным и, возможно, даже полагал, что он и сам «все сделал». Но в том-то и дело, что о настроениях Пуанкаре мы пытаемся догадаться по его молчанию, а не на основании каких-то высказанных им претензий”.

Что сделал Пуанкаре в теории относительности – легко установить: стоит только физику-теоретика внимательно прочитать его статьи [2; 3]. Поэтому нет никакой необходимости “догадываться” о настроениях Пуанкаре, чтобы ответить на вопрос, что он сделал. Академик В. Л. Гинзбург обычно ссылается на высказывание В. Паули в 1921 г., но почему-то не цитирует высказывание В. Паули в 1955 г. Некоторым почему-то хотелось бы, чтобы создателем специальной теории относительности считался только А. Эйнштейн. Но следовать надо фактам и только им.

Остановимся теперь на высказывании профессора Пайса в той же его книге (см. наст. изд., с. 131).

“...Почему Пуанкаре не упомянул об Эйнштейне в своих геттингенских лекциях? Почему ни в одной статье Пуанкаре не писал о роли Эйнштейна в создании теории относительности? Немыслимо, чтобы Пуанкаре, ознакомившись со статьями Эйнштейна 1905 г., не понял их. Невероятно, чтобы к 1909 г., когда он выступал в Геттингене, он не слышал о том, что сделал в данной области Эйнштейн. Неужели дело в капризности или профессиональной зависти?”

Ответ на эти вопросы однозначный. Если прочитать статьи и книги Пуанкаре, опубликованные до 1905 г., и статью А. Эйн-

штейна 1905 г., то легко убедиться, что в работе Эйнштейна для него не содержалось ничего нового. Опираясь на свои предшествующие работы, а также на исследования Лоренца, Пуанкаре сформулировал все основное, что является содержанием теории относительности, открыл законы релятивистской механики, распространил преобразования Лоренца на все силы природы. Но все это он связал с **Великим разрушителем** Г. Лоренцем, поскольку именно его статья 1904 г. дала толчок мысли А. Пуанкаре. Так обычно он поступал. Странно, что у профессора А. Пайса возникли вопросы только к Пуанкаре, а не возникли вопросы к Эйнштейну. Как решился Эйнштейн направить статью в печать по электродинамике движущегося тела, зная работы Лоренца только десятилетней давности, а работы Пуанкаре – пятилетней давности. Что помешало А. Эйнштейну просмотреть рефераты в журнале “*Beiblätter Annalen der Physik*”, для которого он тоже готовил многие рефераты? В 1905 г. был напечатан 21 реферат А. Эйнштейна.

Журнал “*Beiblätter Annalen der Physik*” печатался в Лейпциге отдельными тетрадями. Всего в году издавалось 24 тетради. В четвертой тетради за 1905 г. был напечатан реферат статьи Лоренца, которая появилась в журнале “*Versl. K. Ak. van Wet.*” (1904. 12 (8). S. 986–1009). В этом реферате приводились также преобразования Лоренца.

В восемнадцатой тетради за 1905 г. был напечатан реферат А. Эйнштейна на статью М. Понсо, опубликованную в майском номере французского журнала (см. “*Comptes Rendus*” 1905. 140. S. 1176–1179). В этом же журнале (S. 1171–1173) была напечатана статья П. Ланжевена: “О невозможности обнаружить поступательное движение Земли с помощью физических опытов”. В этой статье П. Ланжевен ссылается на статьи Лоренца 1904 г. и Лармора 1900 г.

Почему Эйнштейн никогда не цитировал статей Пуанкаре [2; 3]? Ведь по теории относительности за последующие 50 лет он написал много статей. Какими качествами личности это

можно объяснить? Как можно не цитировать статьи, если они опубликованы ранее и вы используете изложенные там понятия и идеи?

Академики В.Л. Гинзбург и Я.Б. Зельдович в 1967 г. писали (см.: Знакомый незнакомый Зельдович (в воспоминаниях друзей, коллег, учеников). М.: Наука, 1993. С. 88):

“Например, что бы человек ни сделал сам, он не может претендовать на приоритет, если затем выяснилось, что тот же результат получен ранее другими”.

Это совершенно правильная точка зрения. Ей и необходимо следовать. Идеи и результаты должны быть отнесены только к тому, кто их впервые открыл.

Удивительна судьба, если можно так выразиться, работ Анри Пуанкаре “О динамике электрона”, опубликованных в 1905-1906 гг. Эти выдающиеся исследования А. Пуанкаре стали своеобразным источником, из которого черпались идеи, методы, а затем публиковались без ссылок на автора. Ссылки на эти статьи иногда были, но всегда по частным вопросам. Все то, что открыл и ввел А. Пуанкаре в статьях [2; 3], легко увидеть в той или иной форме в статьях других авторов, опубликованных позже.

М. Планк в статье 1906 г. “Принцип относительности и основные уравнения механики” пишет:

“Принцип относительности, предложенный Лоренцем и в более общей формулировке Эйнштейном, означает ...”

Но это ведь не так. Принцип относительности был впервые в общей форме сформулирован А. Пуанкаре в 1904 г. Далее М. Планк находит уравнения релятивистской механики, но ссылок на статью А. Пуанкаре [3] нет, хотя в ней уже ранее и были получены уравнения релятивистской механики. Если М. Планк

не знал в это время о работе А. Пуанкаре, то он мог бы сослаться на нее позднее. Однако такой ссылки на работу [3] не появилось и позднее. Статьи А. Пуанкаре [2; 3] не появились и в немецком сборнике, посвященном теории относительности. Как все это можно объяснить?

Б. Хофман пишет (см.: Эйнштейновский сборник 1982-1983. М.: Наука, 1986. С. 218):

“Я бы очень хотел знать, смогли бы люди создать СТО без Эйнштейна. Это верно, что Пуанкаре располагал всеми математическими средствами и даже большими, чем применил Эйнштейн в своей работе 1905 г., однако в работах Пуанкаре всегда присутствовало убеждение в существовании покоящейся системы (нечто, покоящееся в эфире), и поэтому создается впечатление, что Пуанкаре и все его последователи ответили бы «да», если бы их спросили происходит ли сжатие, если нечто движется относительно эфира. Но, конечно, те, кто верил в это, должны были бы считать, что покоящиеся стержни должны удлиняться вместо того, чтобы сокращаться, и у Пуанкаре одни часы должны были бы идти быстрее, а другие медленнее. Обратимый характер этой связи – это очень тонкий момент, и весьма вероятно, что люди могли бы никогда не осознать этот факт”.

Все это или неточно, или просто следствие непонимания сути СТО. Во-первых, СТО уже была создана А. Пуанкаре в статьях [2; 3] в соответствии с принципом относительности, который Пуанкаре сформулировал в 1904 г. для всех физических явлений. Согласно принципу относительности физические уравнения в каждой инерциальной системе отсчета одинаковы. Все инерциальные системы отсчета равноправны, а

поэтому наличие покоящейся системы отсчета исключается. Отсюда очевидно, что имеет место обратимость. Во-вторых, А. Пуанкаре открыл группу Лоренца, из которой следует существование обратного элемента, а следовательно, наличие обратимости есть прямое следствие существования группы. В-третьих, в СТО А. Пуанкаре “обратимый характер этой связи – это очень тонкий момент”, как мы видим, тривиально следует, а поэтому писать, “что люди могли бы никогда не осознать этот факт” – это скорее относится к склонности автора видеть проблему там, где ее нет. И тем более нелепо приписывать свое непонимание А. Пуанкаре.

Вызывает удивление высказывание А. Эйнштейна, которое приводит Дж. Холтон.

Дж. Холтон (Гарвардский университет) пишет (см.: Эйнштейновский сборник 1982-1983. М.: Наука, 1986. С. 217):

“Сам Эйнштейн говорил, что не Пуанкаре или Лоренц, а Ланжевен мог создать специальную теорию относительности”.

Если поверить Дж. Холтону, то А. Эйнштейн, как видим, без сомнения считал, что только он и создал специальную теорию относительности. Неужели он не читал статьи А. Пуанкаре, в которых в предельно точной и общей форме изложено все основное содержание специальной теории относительности? Поэтому странно даже само появление такого высказывания из уст А. Эйнштейна. Но если предположить, что за последующие пятьдесят лет А. Эйнштейн все же не прочитал статьи А. Пуанкаре [2; 3], то это тоже удивительно и как это согласуется с “щепетильной честностью Эйнштейна” как ученого, о которой с особой силой писал тот же Дж. Холтон.

Замалчивание работ А. Пуанкаре [2; 3] шло на протяжении всего двадцатого века. Создалось мнение, что специальная теория относительности создана только А. Эйн-

штейном. Об этом пишется в учебниках, в том числе и в школьных, в монографиях, в популярных научных книгах, в энциклопедиях. Немецкие физики, в отличие от французских, сделали многое, чтобы творцом специальной теории относительности считался только А. Эйнштейн, а научное достижение являлось плодом немецкой науки. Но, к счастью, “рукописи не горят”. Статьи [2; 3] ясно показывают основополагающий вклад А. Пуанкаре в создание теории относительности. Все последующее в этом направлении исследований – это применение и развитие его идей и методов.

В 1913 г. в Германии был издан сборник работ Лоренца, Эйнштейна, Минковского по специальной теории относительности. Но фундаментальные работы А. Пуанкаре в сборник не были включены. Как это можно объяснить?

В 1911 г. французский физик Поль Ланжевен опубликовал две статьи по теории относительности: “Эволюция понятия пространства и времени”; “Время, пространство и причинность в современной физике”. Но в этих статьях А. Пуанкаре даже не упоминается, хотя там речь идет о принципе относительности, группе Лоренца, о пространстве и времени, определяемом интервалом. В 1920 г. в статье П. Ланжевена “Историческое развитие принципа относительности” А. Пуанкаре также не упоминается. Как такое мог сделать П. Ланжевен?

В 1935 г. под редакцией профессоров В.К. Фредерикса и Д.Д. Иваненко впервые был издан сборник “Принцип относительности”, в котором содержались работы по теории относительности Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского. Однако, первой работы А. Пуанкаре “О динамике электрона” в нем не оказалось. И только в 1973 г. в сборнике “Принцип относительности” (со вступительной статьей профессора, члена-корреспондента АН СССР Д.И. Блохинцева; составитель сборника профессор А.А. Тяпкин) наиболее полно были представлены работы А. Пуанкаре по теории относитель-

ности, что позволило многим убедиться в решающем вкладе Пуанкаре в создание специальной теории относительности. Несколько позднее, я и академик В.А. Матвеев решили переписать формулы, содержащиеся в статьях А. Пуанкаре “О динамике электрона”, в современных обозначениях, чтобы облегчить изучение этих статей.

В 1984 г. к 130-летию со дня рождения А. Пуанкаре его статьи “О динамике электрона” с комментариями были изданы издательством Института ядерных исследований, а позднее, в 1987 г., они были с дополнениями изданы издательством Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Анри Пуанкаре – редчайшая личность во всей истории науки. Величайший математик, механик и физик-теоретик; его основополагающие труды оставили ярчайший след во многих областях современной науки. Он обладал, к тому же, редким даром глубокого видения науки в целом. В начале прошлого века (1902–1912 гг.) изданы книги Пуанкаре “Наука и гипотеза”; “Ценность науки”; “Наука и метод”; “Последние мысли”. Некоторые из них были почти сразу переведены на русский язык. Эти книги изумительны как по содержанию, так и по свободной, очень яркой и образной манере изложения. Они не устарели до сих пор, и каждому, кто изучает математику, физику, механику, философию познакомиться с ними было бы крайне полезно. К большому сожалению, они по разным причинам долго не переиздавались. И только благодаря настойчивым усилиям академика Л.С. Понтрягина они были переизданы и стали доступны читателю.

§ 10. Принцип стационарного действия в электродинамике

Многие уравнения теоретической физики получают из условия экстремума функционала, который называют действием. Ранее (§ 2) принцип наименьшего действия был применен в механике и, таким образом, были получены уравнения Лагранжа. Нам необходимо и для электродинамики составить действие таким образом, чтобы его вариация по полям приводила к уравнениям Максвелла-Лоренца.

Действие строится с помощью скаляров, составленных из функций поля и тока. Введем тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (10.1)$$

который в силу построения удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (10.2)$$

эквивалентному уравнениям Максвелла-Лоренца (8.26). Для дальнейшего нам понадобятся лишь два простейших инварианта

$$A_\nu S^\nu, \quad F_{\lambda\nu} F^{\lambda\nu}. \quad (10.3)$$

Здесь S^ν – четырехвектор тока (8.9).

Искомое действие будет иметь вид

$$S = \frac{1}{c} \int L d\Omega, \quad (10.4)$$

где L – плотность функции Лагранжа, равная

$$L = -\frac{1}{c} A_\nu S^\nu - \frac{1}{16\pi} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}, \quad d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (10.5)$$

При нахождении уравнений поля в функции действия мы будем варьировать лишь потенциалы поля, считая источники поля S^ν заданными.

Тогда

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^\nu \delta A_\nu + \frac{1}{8\pi} F^{\lambda\sigma} \delta F_{\lambda\sigma} \right] d\Omega = 0. \quad (10.6)$$

Поскольку вариации перестановочны с дифференцированием, получим

$$F^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \delta A_\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \delta A_\lambda \right) = -2F^{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \delta A_\sigma. \quad (10.7)$$

Подставляя (10.7) в (10.6), находим

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^\nu \delta A_\nu - \frac{1}{4\pi} F^{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \delta A_\sigma \right] d\Omega = 0. \quad (10.8)$$

Интегрируя во втором члене по частям и учитывая, что вариации потенциалов в начальный и конечный моменты времени равны нулю, а поле на бесконечности исчезает, получим

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} S^\sigma + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial F^{\sigma\lambda}}{\partial x^\lambda} \right] \delta A_\sigma d\Omega = 0. \quad (10.9)$$

Отсюда, в силу произвольности δA_σ , находим

$$\frac{\partial F^{\sigma\lambda}}{\partial x^\lambda} = -\frac{4\pi}{c} S^\sigma. \quad (10.10)$$

Итак, наш выбор плотности лагранжевой функции (10.5) оправдан, поскольку мы получили в точности вторую пару уравнений Максвелла-Лоренца

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{S} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (10.11)$$

Необходимо иметь в виду, что выбор плотности функции Лагранжа в функции действия не является однозначным, однако легко убедиться, что добавление к плотности функции Лагранжа дополнительного члена в виде четырехмерной дивергенции любого вектора не отражается на виде уравнений поля. Уравнения Максвелла-Лоренца (10.2), (10.10.) инвариантны при калибровочных преобразованиях потенциалов

$$A'_\sigma = A_\sigma + \frac{\partial f}{\partial x^\sigma}, \quad (10.12)$$

здесь f – произвольная функция.

Построенная нами плотность лагранжиана (10.5) неинвариантна при преобразованиях (10.12). При этом преобразовании она на основании закона сохранения тока S^ν (8.10) изменяется только на дивергенцию

$$L' = L - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\nu} (f S^\nu), \quad (10.13)$$

что не сказывается на уравнениях поля.

С точки зрения классической электродинамики потенциал A^ν не имеет физического смысла, поскольку на заряд действует только сила Лоренца, а она выражается через напряженности поля $\vec{E}$, $\vec{H}$. Однако в квантовой механике это уже не так. Оказывается, что в определенной ситуации вектор-потенциал воздействует на электрон. Это эффект Ааронова-Бома. Он был наблюден в 1960 г. Опыт ставился следующим образом: брался длинный тонкий соленоид, магнитное поле вне соленоида равно нулю, тем не менее, на движение электронов вне соленоида оказывалось воздействие. Эффект объясняется тем, что длинный соленоид нарушил односвязность пространства-времени, а поэтому и возникло влияние потенциала A^ν , как и должно быть в калибровочной квантовой теории.

Найдем теперь уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Для их получения необходимо составить действие, которое содержит часть, относящуюся к части-

цам, а также известную уже нам часть, содержащую взаимодействие поля с частицами. Так как для частицы с зарядом e

$$\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad j^i = e\frac{dx^i}{dt}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (10.14)$$

то имеем

$$-\frac{1}{c^2} \int S^\nu A_\nu d\Omega = -\frac{e}{c} \int A_\nu dx^\nu. \quad (10.15)$$

Действие для частицы в электромагнитном поле будет равно

$$S = -mc \int d\sigma - \frac{e}{c} \int A_\nu dx^\nu. \quad (10.16)$$

Варьируя по координатам частицы, получим

$$\delta S = - \int \left(mc U_\nu d\delta x^\nu + \frac{e}{c} A_\nu d\delta x^\nu + \frac{e}{c} \delta A_\nu dx^\nu \right) = 0. \quad (10.17)$$

Интегрируя в первых двух членах по частям и полагая вариации координат на пределах интегрирования равными нулю, получим

$$\delta S = \int \left(mcdU_\nu \delta x^\nu + \frac{e}{c} dA_\nu \delta x^\nu - \frac{e}{c} \delta A_\nu dx^\nu \right) = 0. \quad (10.18)$$

С учетом очевидных соотношений

$$dA_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda, \quad \delta A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda, \quad (10.19)$$

выражение (10.18) принимает вид

$$\delta S = \int \left[mc \frac{dU_\nu}{d\sigma} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda} \right) U^\lambda \right] d\sigma \delta x^\nu = 0; \quad (10.20)$$

отсюда, в силу произвольности вариации δx^ν , следует

$$mc^2 \frac{dU_\nu}{d\sigma} = eF_{\nu\lambda} U^\lambda, \quad (10.21)$$

или

$$mc^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} = e F^{\nu\lambda} U_\lambda. \quad (10.22)$$

В трехмерной записи (10.22) принимает вид

$$mc \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c} (\vec{v} \vec{E}), \quad (10.23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (10.24)$$

Определим теперь потерю энергии электрона, движущегося с ускорением. В случае движения заряда со скоростью малой по сравнению со скоростью света, потеря энергии на излучение определяется формулой Лармора

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2. \quad (10.25)$$

В системе отсчета, в которой заряд покоится, она принимает вид

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_0^2, \quad (10.26)$$

здесь ускорение берется в данной системе отсчета.

В выбранной системе отсчета полный излучаемый импульс в силу симметрии излучения равен нулю:

$$-\frac{\partial p^i}{\partial t} = 0. \quad (10.27)$$

Для нахождения формулы потерь на излучение быстро движущегося заряда необходимо воспользоваться группой Лоренца, согласно которой можно легко перейти от одной системы

отсчета к другой. Для этой цели рассмотрим четырехвектор ускорения, который согласно (9.5) равен

$$a^\nu = c^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} = c \frac{dU^\nu}{d\tau}. \quad (10.28)$$

С помощью этого выражения, а также формул (9.3), получим

$$a^0 = \gamma^4 \left(\frac{\vec{v}}{c} \frac{d\vec{v}}{dt} \right), \quad \vec{a} = \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{\gamma^4}{c^2} \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} \right). \quad (10.29)$$

Используя (10.29), находим инвариант

$$(a^0)^2 - (\vec{a})^2 = -\gamma^6 \left\{ \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 - \left[\frac{\vec{v}}{c}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right]^2 \right\}. \quad (10.30)$$

В покоящейся системе отсчета имеем

$$\gamma^6 \left\{ \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 - \left[\frac{\vec{v}}{c}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right]^2 \right\} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_0^2. \quad (10.31)$$

Запишем теперь формулы (10.26) и (10.27) в ковариантной форме

$$-\frac{\partial p^\nu}{\partial \tau} = \frac{2e^2}{3c^4} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_0^2 U^\nu. \quad (10.32)$$

Подставляя теперь в это выражение (10.31), получим

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left\{ \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 - \left[\frac{\vec{v}}{c}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right]^2 \right\}, \quad (10.33)$$

$$-\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{2e^2}{3c^5} \vec{v} \gamma^6 \left\{ \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 - \left[\frac{\vec{v}}{c}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right]^2 \right\}. \quad (10.34)$$

Формулу (10.33) впервые получил А. Льенар в 1898 г.

В уравнениях движения (10.22) заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле не учитывается реакция излучения. Поэтому эти уравнения справедливы только для движений заряженной частицы в слабых полях. Учет силы

реакции был осуществлен Дираком в 1938 г. и привел к уравнению, которое называется уравнением Дирака-Лоренца:

$$mc^2 \frac{dU^\nu}{d\sigma} = eF^{\nu\lambda} U_\lambda + \quad (10.35)$$

$$+ \frac{2}{3} e^2 \left[\frac{d^2 U^\nu}{d\sigma^2} + U^\nu \cdot \left(\frac{dU_\mu}{d\sigma} \cdot \frac{dU^\mu}{d\sigma} \right) \right].$$

Применим эти формулы к движению ультрарелятивистского заряда с массой m в сильном постоянном однородном магнитном поле H . Будем считать, что движение заряда по окружности определяется только силой Лоренца. Тем самым мы пренебрегаем влиянием силы реакции на движение. Запишем уравнения (10.35) в форме (9.12) и (9.13):

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \frac{e}{c} \cdot [\vec{v}, \vec{H}] + \vec{f}_R, \quad (10.36)$$

$$\vec{f}_R = \frac{2e^2}{3\gamma} \cdot \left[\frac{d^2 \vec{U}}{d\sigma^2} + \vec{U} \cdot \left(\frac{dU_\nu}{d\sigma} \cdot \frac{dU^\nu}{d\sigma} \right) \right], \quad (10.37)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2 c}{3\gamma^2} \left[\vec{U} \cdot \frac{d^2 \vec{U}}{d\sigma^2} + U^2 \cdot \left(\frac{dU_\nu}{d\sigma} \cdot \frac{dU^\nu}{d\sigma} \right) \right], \quad (10.38)$$

где E – энергия частицы.

Поскольку в нашем приближении мы имеем уравнения движения

$$mc \cdot \frac{d\vec{U}}{d\sigma} = \frac{e}{c} \cdot [\vec{U}, \vec{H}], \quad (\vec{U} \cdot \vec{H}) = 0, \quad (10.39)$$

то отсюда следует, что

$$U^2 \cdot \left(\frac{d\vec{U}}{d\sigma} \right)^2 = \left(\frac{eH}{mc^2} \right)^2 \cdot U^4, \quad (10.40)$$

$$\vec{U} \cdot \frac{d^2 \vec{U}}{d\sigma^2} = - \left(\frac{eH}{mc^2} \right)^2 \cdot U^2, \quad (10.41)$$

где U – длина вектора $\vec{U}$. Для ультрарелятивистских частиц

$$U \simeq \frac{E}{mc^2}. \quad (10.42)$$

Так как $U^2 \gg 1$, то в выражении (10.38) мы можем пренебречь первым членом (10.41) по сравнению со вторым (10.40). Во втором члене (10.38) в нашем приближении мы можем также пренебречь слагаемым

$$U^2 \cdot \left(\frac{dU^0}{d\sigma} \right)^2 \quad (10.43)$$

ввиду его малости по сравнению с (10.40). Выражение (10.38) с учетом (10.40) и (10.42) имеет вид

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4 H^2 E^2}{m^4 c^7}. \quad (10.44)$$

Принимая во внимание, что при движении заряда по окружности радиуса R имеет место равенство

$$H = \frac{E}{eR}, \quad (10.45)$$

формулу (10.44) можно теперь записать в виде

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2 c}{3R^2} \cdot \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4. \quad (10.46)$$

Если энергия электронов и величина магнитного поля достаточно велики, то потери энергии на синхротронное излучение становятся весьма значительными. Синхротронное излучение широко используется в биологии и медицине, в производстве интегральных схем и т. д. Созданы специальные накопительные кольца для генерации интенсивных рентгеновских лучей (см. подробнее: *Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика*. М.: Высшая школа, 1980).

§ 11. Движение пробного тела по инерции. Ковариантное дифференцирование

В произвольной системе координат интервал, как известно, имеет вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad \det(\gamma_{\mu\nu}) = \gamma < 0. \quad (11.1)$$

Псевдоевклидова метрика $\gamma_{\mu\nu}$ определяется выражением (3.33). Именно для этой метрики тензор кривизны Римана равен нулю. Действие для свободно движущегося точечного тела массы m имеет вид

$$S = -mc \int d\sigma. \quad (11.2)$$

В силу принципа стационарного действия имеем

$$\delta S = -mc \int \delta(d\sigma) = 0, \quad (11.3)$$

$$\delta(d\sigma^2) = 2d\sigma\delta(d\sigma) = \delta(\gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu) = \quad (11.4)$$

$$= \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda dx^\mu dx^\nu + 2\gamma_{\mu\nu} dx^\mu \delta(dx^\nu).$$

Поскольку

$$\delta(dx^\nu) = d(\delta x^\nu), \quad (11.5)$$

из выражения (11.4) находим

$$\delta(d\sigma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} U^\mu dx^\nu \delta x^\lambda + \gamma_{\mu\nu} U^\mu d(\delta x^\nu), \quad (11.6)$$

здесь

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}. \quad (11.7)$$

Подставляя (11.6) в (11.3), получим

$$\delta S = -mc \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} U^\mu U^\nu \delta x^\lambda + \gamma_{\mu\nu} U^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{d\sigma} \right] d\sigma = 0. \quad (11.8)$$

Так как

$$\gamma_{\mu\nu} U^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} (\gamma_{\mu\nu} U^\mu \delta x^\nu) - \delta x^\nu \frac{d}{d\sigma} (\gamma_{\mu\nu} U^\mu), \quad (11.9)$$

то, учитывая, что вариации на границе области равны нулю, находим

$$\delta S = -mc \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} U^\mu U^\nu - \gamma_{\mu\lambda} \frac{dU^\mu}{d\sigma} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} U^\mu U^\alpha \right] d\sigma \delta x^\lambda = 0. \quad (11.10)$$

Представим последний член в (11.10) в форме

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} U^\mu U^\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} \right) U^\mu U^\alpha. \quad (11.11)$$

С учетом (11.11) выражение (11.10) приобретает вид

$$\int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) U^\mu U^\alpha + \right. \\ \left. + \gamma_{\mu\lambda} \frac{dU^\mu}{d\sigma} \right] d\sigma \delta x^\lambda = 0. \quad (11.12)$$

Поскольку множители δx^λ произвольны, находим

$$\gamma_{\mu\lambda} \frac{dU^\mu}{d\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \gamma_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} \right) U^\mu U^\alpha = 0. \quad (11.13)$$

Умножая (11.13) на $\gamma^{\lambda\nu}$, получим

$$\frac{dU^\nu}{d\sigma} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu U^\mu U^\alpha = 0, \quad (11.14)$$

здесь $\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ – символ Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu = \frac{1}{2} \gamma^{\nu\lambda} (\partial_\alpha \gamma_{\mu\lambda} + \partial_\mu \gamma_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \gamma_{\mu\alpha}). \quad (11.15)$$

Мы видим, что движение по инерции любого пробного тела, независимо от его массы, осуществляется по геодезической линии, определяемой из уравнения (11.14). Совершенно очевидно, что в произвольных координатах нельзя считать геодезические линии прямыми, о чем свидетельствует нелинейная зависимость пространственных координат x^i ($i = 1, 2, 3$) от временной переменной x^0 . Движение по геодезической линии (11.14) в пространстве Минковского есть свободное движение. Таким образом, силы инерции сами по себе не способны приводить к какой-либо деформации. Под их действием осуществляется свободное движение. Ситуация изменяется, когда имеются силы реакции, которые противодействуют силам инерции. В этом случае деформация неизбежна. В невесомости в спутнике деформация отсутствует, поскольку из-за однородности гравитационного поля в каждом элементе объема тела происходит компенсация силы гравитации силами инерции. Силы гравитации и силы инерции – объемные силы.

Физические силы являются четырехвекторами в пространстве Минковского. Но силы инерции таковыми не являются, поскольку они могут быть обращены в нуль при переходе к инерциальной системе отсчета в пространстве Минковского.

Остановимся теперь на вопросе ковариантного дифференцирования. В декартовых координатах x^λ обычное дифференцирование, например, вектора A^ν приводит к тензорной величине

$$\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda} = B_\lambda^\nu \quad (11.16)$$

относительно линейных преобразований. В произвольных координатах y^λ это свойство не сохраняется, а поэтому величина $\frac{\partial A^\nu}{\partial y^\lambda}$ уже не будет тензором.

Необходимо ввести ковариантную производную, которая позволит при дифференцировании тензора опять получать тензор. Это даст нам возможность легко сделать ковариантными любые физические уравнения. **Ковариантность – это не физическое, а математическое требование.**

Ранее (см. (6.13)) мы видели, что из двух векторов A^ν, B_ν можно построить инвариант

$$A^\nu(x)B_\nu(x). \quad (11.17)$$

Рассмотрим инвариант частного вида

$$A_\lambda(x)U^\lambda(x), \quad (11.18)$$

где

$$U^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \quad (11.19)$$

удовлетворяет уравнению (11.14).

Продифференцировав (11.18) по $d\sigma$, мы также получим инвариант (скаляр)

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\lambda U^\lambda) = \frac{dA_\lambda}{d\sigma}U^\lambda + A_\nu \frac{dU^\nu}{d\sigma}.$$

Подставляя в правую часть выражение (11.14), находим

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\lambda U^\lambda) = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} U^\alpha U^\lambda - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu U^\alpha U^\lambda A_\nu, \text{ т. е.}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\lambda U^\lambda) = \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu A_\nu \right) U^\alpha U^\lambda. \quad (11.20)$$

Поскольку (11.20) – инвариант, U^λ – вектор, отсюда следует, что величина

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu A_\nu$$

является ковариантным тензором второго ранга $A_{\lambda;\alpha}$

$$A_{\lambda;\alpha} = \frac{DA_\lambda}{dx^\alpha} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu A_\nu. \quad (11.21)$$

Здесь и далее точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование.

Таким образом, мы определили ковариантную производную от ковариантного вектора A_ν . Определим теперь ковариантную производную от контравариантного вектора A^ν . Для этой цели запишем тот же инвариант в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}(A^\mu U^\nu \gamma_{\mu\nu}) &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} U^\nu U^\lambda \gamma_{\mu\nu} + \\ &+ A^\mu \gamma_{\mu\nu} \frac{dU^\nu}{d\sigma} + A^\mu U^\nu U^\lambda \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть выражение (11.14), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma}(A_\nu U^\nu) &= \\ &= \left[\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} - A^\mu \gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha + A^\mu \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right] U^\nu U^\lambda. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Учитывая определение (11.15), находим

$$A^\mu \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu} - A^\mu \gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha = \frac{1}{2} A^\mu (\partial_\lambda \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu \gamma_{\nu\lambda} - \partial_\nu \gamma_{\mu\lambda}). \quad (11.23)$$

Подставляя это выражение в (11.22), а вместо U^ν используя выражение $U_\alpha \gamma^{\alpha\nu}$, получим

$$\frac{d}{d\sigma}(A_\nu U^\nu) = \left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha A^\mu \right] U^\lambda U_\alpha. \quad (11.24)$$

Поскольку (11.24) – инвариант (скаляр), а U^ν – вектор, из (11.24) следует, что первый множитель справа является тензором. Здесь, как и ранее, U^ν удовлетворяет уравнению (11.14).

Отсюда следует, что ковариантная производная от контравариантного вектора A^ν равна

$$A^\alpha_{;\lambda} = \frac{DA^\alpha}{dx^\lambda} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} A^\mu. \quad (11.25)$$

Используя формулы (11.21) и (11.25), можно получить ковариантные производные и от тензоров второго ранга:

$$A_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} A_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} A_{\mu\alpha}, \quad (11.26)$$

$$A^{\mu\nu}_{;\lambda} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} A^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\alpha} A^{\mu\alpha}, \quad (11.27)$$

$$A^\nu_{\rho;\sigma} = \frac{\partial A^\nu_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} A^\nu_\lambda + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^\lambda_\rho. \quad (11.28)$$

Мы видим, что правила, установленные для (11.21) и (11.25), применяются независимо к каждому индексу тензора. Именно таким способом можно получить ковариантную производную от тензора любого ранга.

Используя выражение (11.26), легко показать, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю

$$\gamma_{\mu\nu;\rho} \equiv 0. \quad (11.29)$$

Пользуясь аппаратом ковариантного дифференцирования, легко записать уравнения релятивистской механики и электродинамики в произвольных координатах пространства Минковского.

Так, заменяя обычную производную в (9.5) на ковариантную, найдем уравнение релятивистской механики в произвольных координатах

$$mc^2 \frac{DU^\nu}{d\sigma} = mc^2 \left(\frac{dU^\nu}{d\sigma} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} U^\mu U^\lambda \right) = F^\nu, \quad (11.30)$$

здесь

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\rho}(\partial_{\mu}\gamma_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}\gamma_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\gamma_{\mu\lambda}). \quad (11.31)$$

Здесь мы обозначили вектор скорости и при действии силы той же буквой U^{ν} . Совершенно очевидно, что этот вектор не имеет никакого отношения к вектору скорости, удовлетворяющему уравнению (11.14), который мы ранее использовали при нахождении ковариантной производной.

Аналогично могут быть записаны и уравнения Максвелла-Лоренца в произвольных координатах. Для этой цели в уравнениях (8.24) и (8.27) необходимо вместо обычных производных поставить ковариантные

$$D_{\sigma}F_{\mu\nu} + D_{\mu}F_{\nu\sigma} + D_{\nu}F_{\sigma\mu} = 0, \quad (11.32)$$

$$D_{\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}S^{\mu}. \quad (11.33)$$

Легко убедиться, что имеют место равенства

$$F_{\mu\nu} = D_{\mu}A_{\nu} - D_{\nu}A_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (11.34)$$

$$D_{\sigma}F_{\mu\nu} + D_{\mu}F_{\nu\sigma} + D_{\nu}F_{\sigma\mu} = \partial_{\sigma}F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}F_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}F_{\sigma\mu}. \quad (11.35)$$

На основании (11.31) находим

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\rho}\partial_{\mu}\gamma_{\nu\rho}. \quad (11.36)$$

Но поскольку имеют место равенства

$$\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial x^{\mu}} = \gamma^{\nu\rho}\partial_{\mu}\gamma_{\rho\nu}, \quad \frac{\partial\sqrt{-\gamma}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}, \quad (11.37)$$

[здесь $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) < 0$], получим

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{\partial\gamma}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} \ln \sqrt{-\gamma}. \quad (11.38)$$

Используя (11.27), находим

$$D_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu F^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu F^{\mu\alpha}. \quad (11.39)$$

Второй член в (11.39) равен нулю в силу антисимметрии тензора $F^{\alpha\nu}$. На основании (11.38) выражение (11.39) можно записать в форме

$$D_\nu(\sqrt{-\gamma} F^{\mu\nu}) = \partial_\nu(\sqrt{-\gamma} F^{\mu\nu}). \quad (11.40)$$

Таким образом, уравнение (11.33) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \partial_\nu(\sqrt{-\gamma} F^{\mu\nu}) = -\frac{4\pi}{c} S^\mu. \quad (11.41)$$

Уравнения движения заряженных частиц могут быть получены путем замены обычных производных в (10.22) на ковариантные

$$mc^2 \frac{DU^\nu}{d\sigma} = e F^{\nu\lambda} U_\lambda. \quad (11.42)$$

Таким образом, мы установили, что переход в пространстве Минковского от галилеевых координат инерциальной системы к произвольным координатам есть простая математическая операция, если введено ковариантное дифференцирование.

Свойство ковариантности уравнений не имеет никакого отношения к принципу относительности. Все это давно разъяснил В.А. Фок [12]. Поэтому никакого общего принципа относительности, как физического принципа, нет.

§ 12. Релятивистски равноускоренное движение. Парадокс часов. Эффект Саньяка

Релятивистски равноускоренное движение – это движение под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{f}$. Согласно (9.12) имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{\vec{f}}{m} = \vec{a}. \quad (12.1)$$

Интегрируя уравнение (12.1) по времени, получим

$$\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{a}t + \vec{v}_0. \quad (12.2)$$

Полагая постоянную $\vec{v}_0$ равной нулю, что соответствует нулевой начальной скорости, после возведения в квадрат находим

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}. \quad (12.3)$$

Учитывая это выражение в (12.2), получим

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{a}t}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}. \quad (12.4)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{a}c^2}{a^2} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right]. \quad (12.5)$$

Поскольку интервал ds равен

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (12.6)$$

то собственное время $d\tau$ для движущегося пробного тела равно

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12.7)$$

Учитывая (12.3), из уравнения (12.7) находим полное собственное время τ

$$\tau = t_0 + \frac{c}{a} \ln \left[\frac{at}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \right]. \quad (12.8)$$

Из этой формулы следует, что при росте времени t в инерциальной системе время собственное для движущегося тела течет медленно, по логарифмическому закону. Мы рассмотрели движение тела с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчета в галилеевых координатах.

Рассмотрим теперь равноускоренную систему отсчета. Пусть инерциальная система и равноускоренная имеют одинаковую ориентацию осей координат, и одна из них движется относительно другой вдоль оси x . Тогда, если считать, что при $t = 0$ их начала координат совпадали, из выражения (12.5) получим закон движения начала координат релятивистски равноускоренной системы отсчета

$$x_0 = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right]. \quad (12.9)$$

Поэтому формулы преобразования координат при переходе от инерциальной системы отсчета (X, T) к релятивистски равноускоренной системе (x, t) будут иметь вид

$$x = X - x_0 = X - \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} - 1 \right]. \quad (12.10)$$

Преобразование времени можно задать произвольно. Пусть оно остается одним и тем же в обеих системах отсчета

$$t = T. \quad (12.11)$$

При преобразованиях (12.10) и (12.11) интервал $d\sigma$ принимает вид

$$d\sigma^2 = \frac{c^2 dt^2}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - \frac{2a t dt dx}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} - dx^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (12.12)$$

Перейдем к рассмотрению “парадокса часов”.

Рассмотрим две системы отсчета. Если два наблюдателя, находящиеся в этих системах отсчета, сверили свои часы в момент $t = 0$, а затем разошлись и по прошествии некоторого промежутка времени вновь встретились в одной точке пространства, то что покажут их часы? Ответ на этот вопрос и является решением так называемого “парадокса часов”. Однако два наблюдателя, находящиеся в различных инерциальных системах отсчета, сверив свои часы в одной и той же точке пространства, в дальнейшем уже не смогут встретиться в какой-либо другой точке пространства, так как для этого, по крайней мере, одному из них пришлось бы прервать свое инерциальное движение и перейти на какое-то время в неинерциальную систему отсчета. В научной литературе, да и в учебниках, часто пишется, что ответ на этот вопрос не может быть дан в рамках специальной теории относительности.

Это, конечно, неправильно, он решается именно в рамках специальной теории относительности. Суть дела в том, что ускоренные системы в псевдоевклидовой геометрии, в противоположность точке зрения А. Эйнштейна, не имеют никакого отношения к гравитационному полю, а поэтому и не требуются использования общей теории относительности для объяснения “парадокса часов”.

Проиллюстрируем это утверждение конкретным расчетом. Предположим, что у нас имеется пара идентичных (идеальных) часов, находящихся в одной и той же точке инерциальной системы отсчета. Их показания в начальный момент $T = 0$ будем считать совпадающими. Пусть одни из этих часов все время покоятся в первоначальной точке и тем самым являются инерциальными. Другие часы под действием приложенной силы начинают в момент $t = 0$ релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением a вдоль оси x и движутся так до момента времени $t = T_1$ по покоящимся часам. Далее, действие силы на вторые часы прекращается и они в течение временного промежутка $T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$ движутся равномерно. После этого к ним прикладывается тормозящая сила, под действием которой они начинают релятивистски равноускоренно двигаться с ускорением $-a$ и движутся так до момента времени $t = 2T_1 + T_2$, в результате чего их скорость относительно первых часов становится равной нулю. Затем, весь цикл повторяется в обратном порядке, и вторые часы прибывают в ту же точку, в которой находятся первые часы.

Вычислим разность показаний этих часов в инерциальной системе отсчета, в которой покоятся первые часы. В силу симметрии задачи (четыре участка равноускоренного движения и два участка прямолинейного равномерного) показание покоящихся часов к моменту их встречи со вторыми будет равно

$$T = 4T_1 + 2T_2. \quad (12.13)$$

Для вторых часов

$$T' = 4T'_1 + 2T'_2. \quad (12.14)$$

Здесь T'_1 – величина промежутка времени от начала ускорения часов до его прекращения, измеренная движущимися часами. T'_2 – величина промежутка собственного времени вторых часов, в течение которого они двигались равномерно между первым и вторым ускорениями.

В инерциальной системе отсчета интервал для движущегося тела равен

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \quad (12.15)$$

Поэтому

$$T'_1 = \int_0^{T_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt. \quad (12.16)$$

На основании (12.3) получим

$$T'_1 = \int_0^{T_1} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}. \quad (12.17)$$

Откуда находим

$$T'_1 = \frac{c}{a} \ln \left(\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right). \quad (12.18)$$

Движение вторых часов в течение промежутка времени

$$T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$$

в силу (12.4) происходит со скоростью

$$v = \frac{aT_1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}}, \quad (12.19)$$

а поэтому согласно (12.15) получим

$$T'_2 = \frac{T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \quad (12.20)$$

Следовательно, к моменту встречи показание вторых часов будет равным

$$T' = \frac{4c}{a} \ln \left(\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right) + \frac{2T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \quad (12.21)$$

Вычитая (12.13) из (12.21), находим

$$\begin{aligned} \Delta T = T' - T = \frac{4c}{a} \ln \left(\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right) - \\ - 4T_1 + 2T_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Можно убедиться, что при любых $a > 0, T_1 > 0, T_2 > 0$ величина ΔT отрицательна. Это означает, что в момент встречи показание вторых часов будет меньше показания первых.

Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета, в которой вторые часы все время покоятся. Эта система отсчета не является инерциальной, так как вторые часы часть времени движутся равноускоренно относительно инерциальной системы отсчета, связанной с первыми часами, а оставшуюся часть времени они движутся равномерно. На первом этапе движение вторых часов является равноускоренным, происходящим по закону (12.9)

$$x_0 = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right].$$

Поэтому на данном отрезке пути интервал в неинерциальной

системе отсчета, согласно (12.12), имеет вид

$$d\sigma^2 = \frac{c^2 dt^2}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - \frac{2a t dx dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} - dx^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (12.23)$$

В этой системе отсчета вторые часы покоятся в точке $x = 0$, а первые движутся по геодезической линии, определяемой из уравнения (11.14)

$$\frac{dU^\nu}{d\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu U^\alpha U^\beta = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (12.24)$$

Из этих четырех уравнений только три независимы, поскольку всегда имеет место соотношение

$$\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1, \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (12.25)$$

Из выражения (12.23) находим

$$\gamma_{00} = \frac{1}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}, \quad \gamma_{01} = -\frac{at}{c \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}, \quad \gamma_{11} = -1. \quad (12.26)$$

На основании (12.26) и соотношения

$$\gamma^{\mu\nu} \cdot \gamma_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu,$$

находим

$$\gamma^{00} = 1, \quad \gamma^{01} = -\frac{at}{c \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}, \quad \gamma^{11} = -\frac{1}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}.$$

С помощью этих выражений, а также (11.31) и (12.26) легко установить, что отличен от нуля только символ Кристоффеля

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{a}{c^2 \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Нам не нужно решать уравнение (12.24), мы воспользуемся только соотношением (12.25)

$$\gamma_{00}(U^0)^2 + 2\gamma_{01}U^0U^1 - (U^1)^2 = 1. \quad (12.27)$$

Принимая во внимание (12.26), из уравнения (12.27) найдем частное решение

$$U^1 = -\frac{at}{c\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}, \quad U^0 = 1, \quad (12.28)$$

которое, как легко проверить, удовлетворяет и уравнениям (12.24). Из выражения (12.28) следует

$$\frac{dx^1}{dt} = -\frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}}}. \quad (12.29)$$

Решая это уравнение с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, получим

$$x = \frac{c^2}{a} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} \right]. \quad (12.30)$$

Таким образом, мы имеем все необходимое для определения показаний обоих часов к моменту окончания первого этапа в их движении. Собственное время $d\tau$ первых часов на данном этапе движения в силу (12.29) совпадает с временем dT инерциальной системы

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dT, \quad (12.31)$$

поэтому к концу этого этапа пути показание первых часов τ_1 будет равно T_1

$$\tau_1 = T_1. \quad (12.32)$$

Поскольку вторые часы покоятся относительно неинерциальной системы отсчета, то их собственное время можно определить из выражения

$$d\tau' = \sqrt{\gamma_{00}} dt. \quad (12.33)$$

Так как первый этап пути занимает промежуток $0 \leq t \leq T_1$ инерциального времени, то в конце данного участка показание τ'_1 вторых часов будет равно

$$\tau'_1 = \int_0^{T_1} \sqrt{\gamma_{00}} dt = \frac{c}{a} \ln \left[\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right]. \quad (12.34)$$

В конце первого этапа пути по достижении скорости

$$v = \frac{aT_1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}} \quad (12.35)$$

действие ускоряющей силы прекращается; это означает, что система отсчета, связанная со вторыми часами, будет инерциальной. Интервал в этой системе отсчета согласно (12.23) к моменту T_1 будет иметь вид

$$d\sigma^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2 - 2v dx dt - dx^2 - dY^2 - dZ^2, \quad (12.36)$$

здесь

$$v = \frac{aT_1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \quad (12.37)$$

Используя для метрики (12.36) тождество

$$\gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1, \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}, \quad (12.38)$$

найдем

$$\frac{dx^1}{dt} = -v. \quad (12.39)$$

Учитывая (12.39) в (12.36), получим

$$d\tau = \frac{d\sigma}{c} = dt, \quad (12.40)$$

т. е. время, показываемое первыми часами на данном этапе, совпадает со временем T_2

$$\tau_2 = T_2. \quad (12.41)$$

Поскольку вторые часы покоятся, их собственное время, которое они показывают, равно

$$d\tau' = \sqrt{\gamma_{00}} dt. \quad (12.42)$$

Отсюда следует

$$\tau'_2 = \int_{T_1}^{T_1+T_2} \sqrt{\gamma_{00}} dt = \frac{T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \quad (12.43)$$

В силу симметрии задачи полученных сведений достаточно, чтобы определить показания часов в момент их встречи. Действительно, показание первых часов τ , определяемое в системе отсчета, связанной со вторыми часами, равно

$$\tau = 4\tau_1 + 2\tau_2, \quad (12.44)$$

что на основании (12.32) и (12.41) дает

$$\tau = 4T_1 + 2T_2. \quad (12.45)$$

Показание вторых часов τ' , определяемое в той же системе отсчета, где вторые часы покоятся, равно

$$\tau' = 4\tau'_1 + 2\tau'_2, \quad (12.46)$$

что на основании (12.34) и (12.43) дает

$$\tau' = \frac{4c}{a} \ln \left[\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right] + \frac{2T_2}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}}. \quad (12.47)$$

Вычитая из (12.47) выражение (12.45), получим

$$\begin{aligned} \Delta\tau = \tau' - \tau = \frac{4c}{a} \ln \left[\frac{aT_1}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}} \right] - \\ - 4T_1 + 2T_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 T_1^2}{c^2}}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Сравнивая (12.22) и (12.48), мы видим, что расчет, проведенный в инерциальной системе, где первые часы покоятся, дает тот же результат, что и расчет в неинерциальной системе, связанной со вторыми часами.

Таким образом,

$$\Delta\tau = \Delta T < 0. \quad (12.49)$$

Отсюда следует, что никакого парадокса нет, поскольку система отсчета, связанная с первыми часами, является инерциальной, тогда как система отсчета, в которой вторые часы покоятся, будет неинерциальной.

Именно поэтому отставание хода вторых часов от хода первых является абсолютным эффектом и не зависит от выбора системы координат, в которой рассчитывается этот эффект.

Рассуждения об относительности движения, которыми ранее пользовались, в данном случае применять нельзя, поскольку системы отсчета неравноправны. Качественно отставание хода вторых часов от первых можно объяснить следующим

образом. Как известно, в произвольных координатах свободное движение пробного тела происходит по геодезической линии, т. е. экстремали, которая в псевдоевклидовом пространстве является максимальной между двумя точками, если на всей линии, соединяющей эти точки величина $d\sigma^2$ положительна. В том случае, когда мы выбираем инерциальную систему в галилеевых координатах, связанную с первыми часами, это будет означать, что первые часы описывают геодезическую линию, тогда как вторые часы, благодаря действию силы, двигаются по линии, отличной от геодезической, а поэтому отстают. То же самое происходит и в том случае, когда система отсчета связана со вторыми часами. При переходе к этой системе отсчета интервал несколько изменяет свою форму. В этом случае первые часы в измененной метрике опять описывают геодезическую линию, тогда как вторые часы покоятся, а следовательно, не описывают геодезическую линию и поэтому отстают.

Мы рассмотрели влияние ускоренного движения на ход часов и показали их замедление. Но этот эффект касается не только часов, но и всех физических, или, более общо, всех естественных явлений. Поэтому межзвездные полеты становятся фантастически увлекательными. Поль Ланжевен еще в 1911 г. в статье [13] рассмотрел путешествие человека с большими скоростями, близкими к скорости света, с последующим возвращением на Землю. С принципиальной точки зрения это возможно, но пока это только фантазия.

Остановимся теперь на эффекте Саньяка (см. подробнее: Успехи физ. наук. 1988. Т. 156. Вып. 1. С.137-143. – Соавт. Чугреев Ю.В.). Как известно, эффект Саньяка наряду с опытом Майкельсона является одним из основных экспериментов теории относительности. Однако до сих пор в литературе можно встретить некорректное объяснение этого эффекта как с помощью сигналов, распространяющихся со сверхсветовыми скоростями, так и со ссылками на общую теорию относительности.

сти (подробнее речь об этом пойдет ниже). Поэтому мы считаем необходимым еще раз подчеркнуть чисто спецрелятивистскую природу эффекта Саньяка.

Опишем вначале опыт Саньяка. На диске по углам четырехугольника расположены зеркала. Углы их взаимного расположения таковы, что луч света от монохроматического источника, отражаясь от зеркал, совершает замкнутый цикл и возвращается к источнику. С помощью полупрозрачной пластинки луч от источника можно разделить на два луча, движущихся в противоположных направлениях этого замкнутого цикла.

Саньяк обнаружил, что если привести диск во вращение, то луч, для которого направление обхода совпадает с направлением вращения, придет к источнику позднее, чем луч, для которого оно противоположно, результатом чего является сдвиг интерференционной картины на фотопластинке. При изменении вращения на противоположное интерференционные полосы смещались в обратном направлении.

Какое объяснение давали этому эффекту? Сам Саньяк получил теоретическое значение величины эффекта путем чисто классического сложения скорости света с линейной скоростью вращения для луча, движущегося в направлении, противоположном вращению, и соответствующего вычитания для луча, распространяющегося в направлении вращения. Расхождение этого результата с экспериментом порядка процента.

Такое объяснение результатов опыта в том или ином виде сохранялось и в дальнейшем, а зачастую и оно затуманивалось. В качестве типичного примера приведем высказывание на этот счет А. Зоммерфельда в его "Оптике":

“Отрицательный результат Майкельсона ничего не говорит, конечно, о распространении света во вращающихся средах. В этом случае нужно было бы привлечь не частную, а общую теорию

относительности с ее добавочными членами, соответствующими механическим центробежным силам. Если, однако, принять во внимание, что в последующих опытах (Саньяка и т. п. – А. Л.) речь идет только о скоростях $v \ll c$ и только об эффектах первого порядка относительно v/c , то можно будет вообще обойтись без теории относительности, и вести расчеты чисто классически”.

Ниже мы убедимся, что объяснение эффекта Саньяка находится полностью в компетенции специальной теории относительности и для этого не нужна ни общая теория относительности, ни сверхсветовые скорости, ни привлечение каких-либо дополнительных постулатов. Мы подробно рассмотрим, находясь в инерциальной неподвижной системе отсчета, как можно вычислить время между приходом лучей к источнику, а также сделаем это, используя и вращающуюся вместе с установкой неинерциальную систему отсчета. Результаты расчетов, как и следует ожидать, совпадут. Для простоты вычислений рассмотрим движение света в световоде по круговой траектории, что соответствует в опыте Саньяка случаю бесконечного числа зеркал.

Рассмотрение начнем со случая инерциальной системы отсчета. Запишем интервал в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (12.50)$$

Пусть, как говорилось ранее, лучи света двигаются в плоскости $z = 0$ по окружности радиуса $r = r_0 = \text{const}$. Для света интервал равен нулю, поэтому мы получаем, что

$$\frac{d\phi_{\pm}(t)}{dt} = \pm \frac{c}{r_0}. \quad (12.51)$$

Индексом «+» помечен луч,двигающийся в направлении вращения, а индексом «-» – луч, вращающийся в противоположном направлении.

С учетом начальных условий $\phi_+(0) = 0$, $\phi_-(0) = 2\pi$ находим закон изменения углов $\phi_{\pm}$ двух лучей в зависимости от времени t :

$$\phi_+(t) = \frac{c}{r_0}t, \quad (12.52)$$

$$\phi_-(t) = 2\pi - \frac{c}{r_0}t.$$

Лучи встретятся в момент t_1 , когда $\phi_+(t_1) = \phi_-(t_1)$. Подставляя сюда (12.52), получаем, что

$$\phi_+(t_1) = \phi_-(t_1) = \pi.$$

Выбирая теперь момент t_1 в качестве начального и повторяя рассуждения, найдем, что следующая встреча лучей произойдет именно в той точке (трехмерного пространства), откуда они были испущены, т. е. в точке с координатами $\phi = 0$, $r = r_0$, $z = 0$.

Подчеркнем, что этот результат не зависит от угловой скорости вращения системы отсчета, на которой находятся источник и зеркала.

Закон изменения угловой координаты источника по определению гласит (начальное условие $\phi_s(0) = 0$):

$$\phi_s(t) = \omega t. \quad (12.53)$$

Следовательно, встреча источника с «+»-лучом произойдет в момент времени t_+ , определяемый условием $\phi_s(t_+) = \phi_+(t_+) - 2\pi$, т. е.

$$t_+ = \frac{2\pi}{(c/r_0) - \omega}, \quad (12.54)$$

а с «-»-лучом – в момент времени t_- , определяемый условием $\phi_s(t_-) = \phi_-(t_-)$:

$$t_- = \frac{2\pi}{(c/r_0) + \omega}. \quad (12.55)$$

Из вида соотношений (12.54), (12.55) может показаться, что скорость света в рассматриваемом случае анизотропна и отличается от c . Однако это не так. Скорость света у обоих лучей одинакова и равна c , а различное время возвращения к источнику объясняется тем, что за время распространения лучей он переместился на некоторое расстояние, в результате чего они прошли до встречи с ним различные расстояния («+»-луч прошел больший путь).

Найдем теперь промежуток собственного времени между приходом двух лучей для наблюдателя, находящегося на источнике. Он равен по определению

$$\Delta = \frac{1}{c} \int_{s(t_-)}^{s(t_+)} ds = \frac{1}{c} \int_{t_-}^{t_+} \frac{ds}{dt} dt, \quad (12.56)$$

где s – интервал. Для значения интервала в точке источника, используя (12.53), получим

$$ds^2 = c^2 dt^2 - r_0^2 d\phi^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} \right),$$

где $\omega^2 r_0^2 / c^2 < 1$.

Подставляя это выражение в (12.56), найдем точную величину эффекта Саньяка⁶:

$$\Delta = \left(1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{c^2} \right)^{1/2} \cdot (t_+ - t_-) = \frac{4\pi \omega r_0^2}{c^2 [1 - (r_0^2 \omega^2 / c^2)]^{1/2}}. \quad (12.57)$$

Отметим, что при выводе (12.57) мы пользовались лишь абсолютными понятиями событий встречи лучей друг с другом и с источником, а не понятием скорости света относительно вращающейся системы отсчета.

⁶При расчете реалистического эффекта Саньяка, когда траекторией светового луча является ломаная линия, необходимо учитывать деформацию центрифуги под действием центробежных сил.

Рассмотрим теперь тот же физический процесс распространения лучей по кругу навстречу друг другу во вращающейся с угловой скоростью ω неинерциальной системе отсчета. Для того, чтобы найти вид интервала в этой системе совершим преобразование координат:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_c - \omega t_c, \\ t &= t_c, \\ r &= r_c, \\ z &= z_c.\end{aligned}\tag{12.58}$$

В новых координатах t, r, ϕ, z получаем (опуская для простоты индекс “н”) интервал в виде

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{2\omega r^2}{c} d\phi c dt - \\ &- dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2.\end{aligned}\tag{12.59}$$

Заметим, что в этом выражении время t является координатным временем для вращающейся системы отсчета.

С учетом начальных условий $\phi_+(0) = 0, \phi_-(0) = 2\pi$ получаем:

$$\begin{aligned}\phi_+(t) &= \frac{ct}{r_0} \left(1 - \frac{\omega r_0}{c}\right), \\ \phi_-(t) &= 2\pi - \frac{ct}{r_0} \left(1 + \frac{\omega r_0}{c}\right).\end{aligned}\tag{12.60}$$

Первая встреча лучей произойдет в момент t_1 , когда $\phi_+(t_1) = \phi_-(t_1)$, т. е. при значении угловой переменной, равном $\phi_1 = \pi[1 - (\omega r_0/c)]$. Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что вторая встреча лучей произойдет “на угле”

$$\phi_2 = 2\pi \left(1 - \frac{\omega r_0}{c}\right),\tag{12.61}$$

т. е. на угловом расстоянии $-2\pi r_0\omega/c$ от источника. Закон изменения угловой координаты источника в данной системе тривиален: $\phi_s = \text{const} = 0$.

Координатный момент времени t_+ встречи «+»-луча с источником находим, как и прежде, из условия: $\phi_s(t_+) = 0 = \phi_+(t_+) - 2\pi$:

$$t_+ = \frac{2\pi r_0}{c - \omega r_0}, \quad (12.62)$$

и, аналогично, момент t_- :

$$t_- = \frac{2\pi r_0}{c + \omega r_0}. \quad (12.63)$$

Промежуток собственного времени между двумя событиями прихода лучей в точку, где находится источник, получим с помощью определения (12.56) и интервала (12.59):

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{c} \int_{t_-}^{t_+} \frac{ds}{dt} dt = \left(1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right)^{1/2} \cdot (t_+ - t_-) = \\ &= \frac{4\pi\omega r_0^2}{c^2[1 - (r_0^2\omega^2/c^2)]^{1/2}}, \end{aligned}$$

т. е. мы пришли к тому же выражению (12.57).

Таким образом, мы показали, что для объяснения эффекта Саньяка нет необходимости ни модифицировать специальную теорию относительности, ни использовать сверхсветовые скорости, ни прибегать к общей теории относительности, а нужно лишь строго следовать специальной теории относительности.

§ 13. О предельной скорости

Интервал для псевдоевклидовой геометрии в произвольных координатах имеет согласно (3.32) и (3.33) следующий общий вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) < 0. \quad (13.1)$$

Метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ равен

$$\gamma_{\mu\lambda}(x) = \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon^\nu \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad \varepsilon^\nu = (1, -1, -1, -1). \quad (13.2)$$

Здесь f^ν — четыре произвольные непрерывные функции с непрерывными производными, которые связывают галилеевы координаты с произвольными x^λ .

События в зависимости от знака $d\sigma^2$ подразделяются на времениподобные

$$d\sigma^2 > 0, \quad (13.3)$$

пространственноподобные

$$d\sigma^2 < 0, \quad (13.4)$$

изотропные

$$d\sigma^2 = 0. \quad (13.5)$$

Такое подразделение интервалов является абсолютным, оно не зависит от выбора системы координат.

Для времениподобного интервала $d\sigma^2 > 0$ всегда существует такая инерциальная система, в которой он определяется только временем

$$d\sigma^2 = c^2 dT^2.$$

Для пространственноподобного интервала $d\sigma^2 < 0$ всегда можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой он

определяется расстоянием между бесконечно близкими пространственными точками

$$d\sigma^2 = -d\ell^2, \quad d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Эти утверждения справедливы и для конечного интервала σ .

Любые два события, относящиеся к данному телу, описываются времениподобным интервалом. Изотропный интервал соответствует полю, которое не имеет массы покоя. Посмотрим к каким выводам приводит изотропный интервал

$$\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \gamma_{00}(dx^0)^2 + 2\gamma_{0i} dx^0 dx^i + \gamma_{ik} dx^i dx^k = 0. \quad (13.6)$$

Выделим в (13.6) времениподобную часть

$$c^2 \left[\sqrt{\gamma_{00}} dt + \frac{\gamma_{0i} dx^i}{c\sqrt{\gamma_{00}}} \right]^2 - \left[-\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}} \right] dx^i dx^k = 0. \quad (13.7)$$

Величину

$$d\tau = \sqrt{\gamma_{00}} dt + \frac{\gamma_{0i} dx^i}{c\sqrt{\gamma_{00}}} = \frac{1}{c} \left(\frac{\gamma_{0\lambda} dx^\lambda}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right) \quad (13.8)$$

следует рассматривать как физическое время, которое, как мы ниже убедимся, не зависит от выбора временной переменной. В общем случае (неинерциальные системы) величина $d\tau$ не является полным дифференциалом, поскольку не будут выполняться условия

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma_{00}}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right), \quad (13.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\gamma_{0i}}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\gamma_{0k}}{\sqrt{\gamma_{00}}} \right).$$

Второй член в (13.7) есть не что иное, как квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками **трехмерного пространства**, который не зависит от выбора координат в этом пространстве:

$$d\ell^2 = \chi_{ik} dx^i dx^k; \quad (13.10)$$

здесь метрический тензор трехмерного пространства χ_{ik} равен

$$\chi_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}. \quad (13.11)$$

Учитывая (13.8) и (13.10), из выражения (13.7) находим

$$\frac{d\ell}{d\tau} = c. \quad (13.12)$$

Величины $d\ell$ и $d\tau$ имеют локальный характер. В этом случае **теряет смысл понятие одновременности** для разноместных событий, так как нельзя осуществить **синхронизацию часов** с помощью светового сигнала, поскольку она зависит от пути синхронизации. Из (13.12) следует, что поле в каждой точке пространства Минковского, согласно локальным характеристикам $d\ell$ и $d\tau$, имеет скорость, равную электродинамической постоянной c . Это предельная скорость, которая недосяжима для частиц, имеющих массу покоя, так как для них

$$d\sigma^2 > 0.$$

Это неравенство является условием причинности. Принцип причинности не содержится в уравнениях Максвелла-Лоренца, он накладывается как естественное дополнительное условие. Г. Минковский в 1909 г. сформулировал его как основную аксиому следующим образом:

“Субстанция, находящаяся в любой мировой точке, всегда при надлежащем определении пространства и времени (т. е. при соответствующем

выборе системы отсчета в пространстве Минковского. — А. Л.) *может быть рассматриваема как находящаяся в покое. Аксиома выражает ту мысль, что в каждой мировой точке выражение*

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

всегда положительно или, иначе, что всякая скорость v всегда меньше, чем c ".

Глубокий физический смысл предельной скорости раскрыл А. Пуанкаре в работе [1] 1904 г., еще до своих основополагающих работ [2; 3]. Он писал:

“На основе всех этих результатов, если они подтверждаются, возникла бы совершенно новая механика, которая характеризовалась бы главным образом тем фактом, что никакая скорость не могла бы превышать скорости света,⁷ подобно тому как температура не может упасть ниже абсолютного нуля. Для наблюдателя, совершающего поступательное движение, о котором он не подозревает, никакая наблюдаемая скорость также не могла бы превышать скорость света; и здесь было бы противоречие, если бы мы не вспомнили, что этот наблюдатель пользуется не теми часами, что покоящийся наблюдатель, а часами, отмечающими «местное время»”.

Именно эти мысли А. Пуанкаре и его принцип относительности изложены им в докладе на Конгрессе искусства и науки

⁷Поскольку тела противопоставляли бы возрастающую инерцию силам, стремящимся ускорить их движение, и эта инерция становилась бы бесконечной при приближении к скорости света.

в Сент-Луисе (сентябрь 1904 г.) и нашли свое воплощение в работах [2; 3]. Они также лежат в основе и работы А. Эйнштейна 1905 г.

Сигнал от одного объекта к другому можно передать только с помощью материальной субстанции; из предыдущего очевидно, что c является **предельной скоростью для передачи взаимодействия или информации**. Поскольку обычно принимается, что частицы, соответствующие электромагнитному полю, — фотоны не имеют массы покоя, величину c отождествляют со скоростью света. Существование предельной скорости есть прямое важное следствие псевдоевклидовой геометрии пространства-времени.

Если мы выберем функции f^ν в (13.2) следующим специальным образом

$$f^0(x^\lambda), \quad f^i(x^k), \quad (13.13)$$

то такое преобразование не выведет нас из инерциальной системы координат.

В этом случае метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ согласно (13.2) и (13.13) принимает вид

$$\gamma_{00} = \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^0} \right)^2, \quad \gamma_{0i} = \frac{\partial f^0}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial x^i}, \quad (13.14)$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial f^0}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial x^k} - \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial f^\ell}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^\ell}{\partial x^k}. \quad (13.15)$$

Подставляя значения (13.14) для метрических коэффициентов γ_{00} , γ_{0i} в (13.8), получим с учетом (3.30) и (13.13)

$$d\tau = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) = \frac{1}{c} df^0 = \frac{1}{c} dX^0. \quad (13.16)$$

Мы видим, что собственное время в данном случае является полным дифференциалом, так как наша система инерциальна.

Подставляя (13.14) и (13.15) в (13.11), получим

$$\chi_{ik} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial f^n}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^n}{\partial x^k}. \quad (13.17)$$

Отсюда находим с учетом (3.30) и (13.13)

$$d\ell^2 = \chi_{ik} dx^i dx^k = \sum_{n=1}^3 (df^n)^2 = \sum_{n=1}^3 (dX^n)^2. \quad (13.18)$$

В инерциальной системе отсчета имеет место многозначность координатного описания пространства Минковского в зависимости от выбора функций (13.13). С этим связан произвол в принятии **соглашения** об одновременности в разных точках пространства. Все эти соглашения условны. Однако эта многозначность, а следовательно, и произвол в выборе соглашения не сказывается на физических величинах. Формулы (13.16) и (13.18) показывают, что в инерциальной системе отсчета физические величины времени (13.8) и расстояния (13.10) не зависят от выбора соглашения об одновременности. Поясню. В формулах (13.16) и (13.18) при любом выборе функций (13.13) возникают только **галилеевы координаты** X^0, X^n пространства Минковского, соответствующие инварианту (3.22). Это и устраняет в физических величинах времени (13.8) и расстояния (13.10) произвол в выборе условного соглашения об одновременности. Более того, любые физические величины в принципе не могут зависеть от выбора этого соглашения об одновременности. И если кто-то написал или пишет противоположное, то это свидетельствует только о том, что он **не уяснил** сути теории относительности. Необходимо отличать координатные величины от физических величин. Подробно об этом см. [6].

Приведем конкретный частный пример соглашения об одновременности. Пусть синхронизация часов в разных простран-

ственных точках осуществляется с помощью светового сигнала, скорость которого в направлении, параллельном оси X , равна c_1 в положительном направлении и c_2 – в отрицательном. Тогда сигнал, посланный из точки A в момент времени t_A , придет в точку B во время t_B , равное

$$t_B = t_A + \frac{X_{AB}}{c_1}. \quad (M)$$

Отраженный сигнал достигнет точки A в момент времени t'_A

$$t'_A = t_B + \frac{X_{AB}}{c_2}.$$

Подставляя в это выражение значение t_B , определяемое формулой (M), получим

$$t'_A - t_A = X_{AB} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right).$$

Отсюда имеем

$$X_{AB} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (t'_A - t_A).$$

Используя это выражение в равенстве (M), находим

$$t_B = t_A + \frac{c_2}{c_1 + c_2} (t'_A - t_A).$$

Таким образом, мы пришли к синхронизации, предложенной Рейхенбахом (см. его книгу “Философия пространства и времени”. М.: Прогресс, 1985. С. 147):

$$t_B = t_A + \varepsilon(t'_A - t_A), \quad 1 > \varepsilon > 0.$$

Принятое нами условное соглашение по синхронизации часов, а тем самым и по одновременности в разных точках пространства, соответствует выбору в инерциальной системе отсчета интервала следующего вида:

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - \frac{c(c_2 - c_1)}{c_1 c_2} dx^0 dx - \frac{c^2}{c_1 c_2} (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (K)$$

Здесь мы имеем дело с координатным временем $t = x^0/c$ и другими координатными величинами.

Метрические коэффициенты интервала (K) равны:

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= 1, \quad \gamma_{01} = -\frac{c(c_2 - c_1)}{2c_1 c_2}, \\ \gamma_{11} &= -\frac{c^2}{c_1 c_2}, \quad \gamma_{22} = -1, \quad \gamma_{33} = -1. \end{aligned} \quad (L)$$

Используя формулы (13.14) и (13.15), а также (L), находим функции преобразования (13.13) для данного случая:

$$\begin{aligned} f^0 &= X^0 = x^0 - \frac{x}{2} \cdot \frac{c(c_2 - c_1)}{c_1 c_2}, \\ f^1 &= X = x \frac{c(c_1 + c_2)}{2c_1 c_2}, \\ f^2 &= Y = y, \quad f^3 = Z = z. \end{aligned}$$

Находя отсюда обратные функции преобразования и вычисляя с их помощью дифференциалы dx^0 , dx и затем подставляя их в (K), находим

$$d\sigma^2 = (dX^0)^2 - (dX)^2 - (dY)^2 - (dZ)^2. \quad (H)$$

Отсюда, **физическое время** $d\tau$ в нашем примере имеет вид:

$$\begin{aligned} d\tau &= dt - \frac{dx}{2} \cdot \frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2}, \\ dX^0 &= cd\tau, \end{aligned}$$

и оно не зависит от выбора функций (13.13), поскольку полностью определяется только интервалом (H). Изменение координатных величин вида (13.13) ведет только к изменению связи **физического времени** с координатными величинами.

Условному соглашению об одновременности всегда соответствует определенный выбор координатной системы в инерциальной системе отсчета пространства Минковского. Таким образом, **условное соглашение об одновременности** – это не что иное, как **определенный выбор системы координат** в инерциальной системе отсчета пространства Минковского.

Важный вклад в понимание некоторых принципиальных вопросов теории относительности, связанных с определением одновременности в разных точках пространства, был внесен профессором А.А. Тяпкиным (Успехи физ. наук. 1972. Т. 106. Вып. 4.)

Вернемся теперь к анализу физического времени $d\tau$. Величина $d\tau$ характеризует физическое время, которое не зависит от выбора координатного времени. Действительно, введем новую переменную x'^0 такую, что

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^i), \quad x'^i = x'^i(x^k). \quad (13.19)$$

Тогда, в силу тензорного характера преобразования $\gamma_{\mu\nu}$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu},$$

будем иметь в нашем случае

$$\gamma'_{00} = \gamma_{00} \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right)^2, \quad \gamma'_{0\lambda} = \gamma_{0\beta} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}; \quad (13.20)$$

аналогично

$$dx'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} dx^\sigma. \quad (13.21)$$

Учитывая символ Кронекера

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \cdot \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = \delta_\sigma^\beta, \quad (13.22)$$

получим

$$cd\tau = \frac{\gamma'_{0\lambda} dx'^\lambda}{\sqrt{\gamma'_{00}}} = \frac{\gamma_{0\sigma} dx^\sigma}{\sqrt{\gamma_{00}}}. \quad (13.23)$$

Мы видим, что физическое время $d\tau$ не зависит от выбора системы координат в инерциальной системе отсчета пространства Минковского.

Физическое время определяет протекание физического процесса, однако величина $d\tau$ в неинерциальной системе координат имеет локальный характер, поскольку она не является полным дифференциалом, а поэтому и **не существует переменной τ** .

В этом случае не существует единого физического времени, линии которого были бы ортогональны трехмерному пространству. В неинерциальной системе координат интервал $d\sigma$ выражается через локальные физические величины $d\tau$, $d\ell$ следующим образом

$$d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 - d\ell^2.$$

В этом случае **не существует** переменных τ , ℓ . Здесь с необходимостью возникают **координатные величины**, которые позволяют описывать явления в пространстве и времени в неинерциальной системе.

В инерциальной системе в галилеевых координатах $d\tau$ совпадает с дифференциалом dt , а поэтому можно ввести в пространстве Минковского единое время t . Оно и будет физическим. Введение одновременности для всех точек трехмерного пространства является следствием псевдоевклидовой геометрии четырехмерного пространства событий.

В инерциальной системе в галилеевых координатах можно говорить о постоянной скорости света, одинаковой во всех направлениях и совпадающей по величине с электродинамической постоянной c . В инерциальной системе в любых других допустимых координатах скорость света будет такой же, если время определить согласно формуле (13.8), а расстояние по формуле (13.10). В неинерциальной системе координат электродинамическая постоянная c выражается только через локальные величины $d\tau$, $d\ell$. В этом случае не существует переменных τ , ℓ .

Часто пишут, что в основе специальной теории относительности лежит принцип постоянства скорости света. Это неправильно. **Никакого принципа постоянства скорости света как исходного физического принципа не существует**, поскольку он сам является простым следствием принципа относительности Пуанкаре для всех явлений природы. Достаточно применить его к излучению электромагнитной сферической волны, чтобы убедиться, что скорость света в каждой инерциальной системе отсчета равна электродинамической постоянной c . Поэтому это положение ввиду его частного значения, как мы уже отмечали (см. § 3 и § 9), не лежит в основе теории относительности. Точно также имеет ограниченный смысл и синхронизация часов в разных точках пространства, так как на основе использования физических величин она возможна только в инерциальных системах отсчета.

Основываясь на принципе постоянства скорости света нельзя перейти к ускоренным системам координат, так как для них теряет смысл понятие *одновременности*, поскольку синхронизация часов в разных пространственных точках с помощью физических величин зависит от пути синхронизации. Возникает необходимость описания явлений с помощью координатных величин.

Определим теперь координатную скорость света

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = v \ell^i, \quad (13.24)$$

здесь ℓ^i – единичный вектор, удовлетворяющий условию

$$\chi_{ik} \ell^i \ell^k = 1. \quad (13.25)$$

Выражение (13.12) с учетом формул (13.8), (13.10) и (13.25) принимает вид

$$\frac{v}{\sqrt{\gamma_{00}} + \frac{v}{c} \cdot \frac{\gamma_{0i} \ell^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}} = c. \quad (13.26)$$

Откуда и находится координатная скорость

$$v = c \cdot \frac{\sqrt{\gamma_{00}}}{1 - \frac{\gamma_{0i} \ell^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}}. \quad (13.27)$$

В общем случае координатная скорость не одинакова как по величине, так и по направлению. По величине она может быть любой, удовлетворяющей условию

$$0 < v < \infty. \quad (13.28)$$

В галилеевых координатах инерциальной системы отсчета координатная скорость совпадает с физической.

В произвольной неинерциальной системе отсчета для описания физических процессов всегда можно ввести многими способами единое координатное время. В этом случае синхронизация часов в разных пространственных точках должна осуществляться с помощью координатной скорости. В неинерциальных системах для описания физического процесса необходимо использовать **координатные величины**, поскольку в этом случае **физические величины определяются только локально**.

§ 14. Прецессия Томаса

Пусть частица имеет собственный момент (спин) S^ν . В системе покоя частицы четырехвектор момента (спина) имеет компоненты $(0, \vec{J})$. В произвольной инерциальной системе координат имеет место соотношение

$$S^\nu U_\nu = 0. \quad (14.1)$$

При действии на частицу силы $\vec{f}$ без крутящего момента должно выполняться условие

$$\frac{dS^\nu}{d\tau} = Z U^\nu, \quad (14.2)$$

здесь U^ν – четырехвектор скорости, τ – собственное время,

$$d\tau = dt \frac{1}{\gamma}. \quad (14.3)$$

Если скорость U^i не равна нулю, то величину Z можно определить из соотношения

$$\frac{d}{d\tau}(S^\nu U_\nu) = \frac{dS^\nu}{d\tau} U_\nu + \frac{dU_\nu}{d\tau} S^\nu = 0. \quad (14.4)$$

Подставляя (14.2) в (14.4), получим

$$Z = - \left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} \right), \quad (14.5)$$

ковариантный вектор S_μ имеет компоненты

$$S_\mu = (S^0, -S^1, -S^2, -S^3). \quad (14.6)$$

С учетом (14.5) уравнение движения для вектора спина (14.2) принимает вид

$$\frac{dS^\nu}{d\tau} = - \left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} \right) U^\nu. \quad (14.7)$$

Нашей дальнейшей целью будет – детализировать эти уравнения, используя преобразования Лоренца. Пусть в лабораторной инерциальной системе отсчета частица со спином $\vec{J}$ движется со скоростью $\vec{v}$. В этом случае инерциальная лабораторная система отсчета относительно инерциальной системы отсчета, в которой частица покоится, будет двигаться со скоростью $-\vec{v}$. Используя преобразования Лоренца (4.18), (4.19) и учитывая знак скорости, получим

$$S^0 = \gamma \frac{(\vec{v}\vec{J})}{c}, \quad \vec{S} = \vec{J} + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v}(\vec{v}\vec{J}). \quad (14.8)$$

Четырехвекторы U^μ , $\frac{dU^\mu}{d\tau}$ имеют следующие компоненты

$$U^\mu = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right), \quad \frac{dU^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{\gamma}{c} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \right). \quad (14.9)$$

Используя (14.6), (14.8) и (14.9), получим

$$\begin{aligned} \left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} \right) &= \gamma \frac{(\vec{v}\vec{J})}{c} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} - \\ &- \left(\frac{\gamma}{c} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \right) \cdot \left(\vec{J} + \frac{\gamma - 1}{v^2} \vec{v}(\vec{v}\vec{J}) \right). \end{aligned} \quad (14.10)$$

После вычислений в правой части выражения (14.10) останутся только члены, полученные от умножения первого члена в скобке на два члена во второй скобке, все остальные члены взаимно уничтожаются

$$\left(S_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} \right) = -\frac{\gamma}{c} \left\{ \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v}\vec{J}) \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) \right\}. \quad (14.11)$$

Используя (14.8) и (14.11), запишем уравнение (14.7) отдельно для нулевой компоненты четырехвектора спина S^ν и для его

векторной части

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(\vec{v}\vec{J}) \right\} = \gamma^2 \left\{ \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) + \frac{\gamma-1}{v^2} (\vec{v}\vec{J}) \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) \right\}, \quad (14.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left\{ \vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2} \vec{v}(\vec{v}\vec{J}) \right\} = \\ = \frac{\gamma^2}{c^2} \vec{v} \left\{ \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) + \frac{\gamma-1}{v^2} (\vec{v}\vec{J}) \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Из уравнений (14.12) и (14.13) находим

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \vec{J} + \frac{\gamma-1}{v^2} \vec{v}(\vec{v}\vec{J}) \right\} - \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(\vec{v}\vec{J}) \right\} = 0. \quad (14.14)$$

Из уравнения (14.12) найдем

$$\gamma^2 \frac{(\gamma-1)}{v^2} (\vec{v}\vec{J}) \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(\vec{v}\vec{J}) \right\} - \gamma^2 \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right). \quad (14.15)$$

Запишем первый член уравнения (14.14) в развернутой форме

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}}{d\tau} + \frac{\gamma^4}{c^4(1+\gamma)^2} \vec{v}(\vec{v}\vec{J}) \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) + \\ + \frac{\gamma\vec{v}}{c^2(1+\gamma)} \frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(\vec{v}\vec{J}) \right\} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} (\vec{v}\vec{J}) \frac{d\vec{v}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

При вычислении были учтены равенства

$$\frac{\gamma-1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{\gamma^3}{c^2} \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right). \quad (14.17)$$

Второй член в (14.16) можно преобразовать, используя равенство (14.15), к виду

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^4}{c^4(1+\gamma)^2} \vec{v}(\vec{v}\vec{J}) \left(\vec{v} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) = \\ = \frac{\vec{v}}{c^2(1+\gamma)} \left[\frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(\vec{v}\vec{J}) \right\} - \gamma^2 \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Используя (14.18), мы видим, что второй член вместе с третьим членом в (14.16) приводятся к виду

$$\frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{d}{d\tau} \left\{ \gamma(\vec{v}\vec{J}) \right\} - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} \vec{v} \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right). \quad (14.19)$$

С учетом (14.16) и (14.19) уравнение (14.14) принимает следующую форму

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} + \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} \left\{ \frac{d\vec{v}}{d\tau} (\vec{v}\vec{J}) - \vec{v} \left(\vec{J} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right) \right\} = 0. \quad (14.20)$$

Используя формулу

$$\left[\vec{a} [\vec{b}, \vec{c}] \right] = \vec{b} (\vec{a}\vec{c}) - \vec{c} (\vec{a}\vec{b}), \quad (14.21)$$

и выбирая векторы

$$\vec{a} = \vec{J}, \quad \vec{b} = \frac{d\vec{v}}{d\tau}, \quad \vec{c} = \vec{v}, \quad (14.22)$$

уравнение (14.20) приводим к виду

$$\frac{d\vec{J}}{d\tau} = \left[\vec{\Omega}, \vec{J} \right], \quad (14.23)$$

где

$$\vec{\Omega} = -\frac{\gamma-1}{v^2} \left[\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{d\tau} \right]. \quad (14.24)$$

Вектор спина $\vec{J}$ при движении частицы по криволинейной траектории прецессирует вокруг направления $\vec{\Omega}$ с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Этот эффект впервые открыт Томасом [14].

Уравнение релятивистской механики (9.12) можно записать в форме

$$m \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \vec{f} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{v} \vec{f}). \quad (14.25)$$

С учетом этого уравнения выражение (14.24) принимает вид

$$\vec{\Omega} = -\frac{\gamma - 1}{mv^2} [\vec{v}, \vec{f}]. \quad (14.26)$$

Таким образом, сила без крутящего момента из-за псевдоевклидовой структуры пространства-времени вызывает прецессию спина, если ее действие приводит к криволинейному движению в данной инерциальной системе отсчета. В том случае, когда сила направлена в некоторой инерциальной системе отсчета по направлению скорости частицы, прецессия спина отсутствует. Но параллельность векторов силы $\vec{f}$ и скорости $\vec{v}$ нарушается при переходе от одной инерциальной системы к другой. Поэтому эффект прецессии, равный нулю для наблюдателя в одной инерциальной системе отсчета, будет отличен от нуля для наблюдателя, находящегося в некоторой другой инерциальной системе отсчета.

§ 15. Уравнения движения и законы сохранения в классической теории поля

Ранее мы видели, что с помощью лагранжева подхода можно построить все уравнения Максвелла-Лоренца. Этот подход имеет явный общеквариантный характер. Он позволяет получить в общем виде уравнения движения поля и законы сохранения без явной конкретизации плотности функции Лагранжа. В этом подходе каждое физическое поле описывается одно- или многокомпонентной функцией координат и времени, называемой функцией поля (или полевой переменной). В качестве полевых переменных берутся величины, преобразующиеся по одному из линейных представлений группы Лоренца, например, скалярное, спинорное, векторное и даже тензорное. Наряду с полевыми переменными важную роль играет и метрический тензор пространства-времени, который определяет геометрию для физического поля, а также выбор той или иной системы координат, в которой производится описание физических процессов. Выбор системы координат является в то же время и выбором системы отсчета. Конечно, не всякий выбор системы координат изменяет систему отсчета. Любые преобразования в данной системе отсчета вида

$$x'^0 = f^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (15.1)$$

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$$

всегда оставляют нас в этой системе отсчета. Всякий другой выбор системы координат обязательно приводит к изменению системы отсчета. Выбор системы координат производится из класса допустимых координат:

$$\gamma_{00} > 0, \quad \gamma_{ik} dx^i dx^k < 0, \quad \det |\gamma_{\mu\nu}| = \gamma < 0. \quad (15.2)$$

Исходным пунктом лагранжева формализма является построение функции действия. Обычно выражение, определяющее функцию действия, записывают в виде

$$S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} L(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (15.3)$$

где интегрирование производится по некоторой произвольной четырехмерной области пространства-времени. Поскольку действие должно быть инвариантным, плотность функции Лагранжа является плотностью скаляра веса +1. Плотность скаляра веса +1 есть произведение скалярной функции на величину $\sqrt{-\gamma}$. Выбор плотности лагранжиана осуществляется с учетом ряда требований. К их числу относится требование вещественности.

Таким образом, плотность лагранжиана может быть построена с помощью изучаемых полей φ , метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ и частных производных по координатам

$$L = L(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A, \dots, \gamma_{\mu\nu}, \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}). \quad (15.4)$$

Для простоты предположим, что рассматриваемая нами система состоит из вещественного векторного поля. Будем считать, что лагранжиан поля не содержит производных выше первого порядка. Это ограничение приводит к тому, что все наши уравнения поля будут уравнениями второго порядка

$$L = L(A^\nu, \partial_\lambda A^\nu, \gamma_{\mu\nu}, \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}). \quad (15.5)$$

Заметим, что если лагранжиан построен, то теория определена. Уравнения поля найдем из принципа наименьшего действия

$$\delta S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \delta L = 0. \quad (15.6)$$

Вариация δL равна

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} \delta A_\lambda + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \delta (\partial_\nu A_\lambda), \quad (15.7)$$

$$\delta L = \frac{\delta L}{\delta A_\lambda} \delta A_\lambda + \partial_\nu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \delta A_\lambda \right]. \quad (15.8)$$

Здесь мы обозначили вариационную производную Эйлера через

$$\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \right). \quad (15.9)$$

При получении выражения (15.8) мы учли, что

$$\delta (\partial_\nu A_\lambda) = \partial_\nu (\delta A_\lambda). \quad (15.10)$$

Подставляя (15.8) в (15.6) и применяя теорему Гаусса, получим

$$\delta S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left(\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} \right) \delta A_\lambda + \frac{1}{c} \int_{\Sigma} ds_\nu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \delta A_\lambda \right] = 0.$$

Поскольку вариация поля на границе Σ равняется нулю, имеем

$$\delta S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left(\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} \right) \delta A_\lambda = 0. \quad (15.11)$$

В силу произвольности вариаций δA_ν по основной лемме вариационного исчисления получаем уравнение для поля

$$\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \right) = 0. \quad (15.12)$$

Мы видим, что если лагранжиан найден, то теория создана. Кроме уравнений поля метод Лагранжа дает возможность получить и дифференциальные законы сохранения. Принято различать два типа дифференциальных законов сохранения: **сильные и слабые. Сильным законом сохранения** называют дифференциальное соотношение, которое выполняется в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Слабые законы сохранения получаются из сильных, если учесть в них уравнение поля (15.12).

Следует особо подчеркнуть, что сильные дифференциальные законы сохранения в общем случае не утверждают сохранения чего-либо ни локально, ни глобально. Для нашего случая действие имеет вид

$$S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x L(A_{\lambda}, \partial_{\nu} A_{\lambda}, \gamma_{\mu\nu}, \partial_{\lambda} \gamma_{\mu\nu}). \quad (15.13)$$

Совершим бесконечно малое преобразование координат

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + \delta x^{\nu}, \quad (15.14)$$

здесь δx^{ν} – бесконечно малый четырехвектор.

Так как действие является скаляром, то при этом преобразовании оно остается неизменным, а следовательно

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int_{\Omega'} d^4x' L'(x') - \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x L(x) = 0, \quad (15.15)$$

где

$$L'(x') = L'(A'_{\lambda}, \partial'_{\nu} A'_{\lambda}(x'), \gamma'_{\mu\nu}(x'), \partial'_{\lambda} \gamma'_{\mu\nu}(x')).$$

Первый член в (15.15) можно записать в виде

$$\int_{\Omega'} d^4x' L'(x') = \int_{\Omega} J d^4x L'(x'), \quad (15.16)$$

где якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det \left| \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} \right|. \quad (15.17)$$

При преобразовании (15.14) якобиан имеет вид

$$J = 1 + \partial_\lambda \delta x^\lambda. \quad (15.18)$$

Разлагая $L'(x')$ в ряд Тейлора, имеем

$$L'(x') = L'(x) + \delta x^\lambda \frac{\partial L}{\partial x^\lambda}. \quad (15.19)$$

Учитывая (15.16), (15.18) и (15.19), перепишем вариацию (15.15) в виде

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left[\delta_L L(x) + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\delta x^\lambda L(x) \right) \right] = 0; \quad (15.20)$$

здесь мы обозначили

$$\delta_L L(x) = L'(x) - L(x).$$

Эта вариация обычно называется вариацией Ли. Она перестановочна с частным дифференцированием

$$\delta_L \partial_\nu = \partial_\nu \delta_L. \quad (15.21)$$

Вариация Ли от плотности функции Лагранжа равна

$$\begin{aligned} \delta_L L(x) &= \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} \delta_L A_\lambda + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \delta_L \partial_\nu A_\lambda + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \delta_L \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda \gamma_{\mu\nu})} \delta_L \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (15.22)$$

В силу произвольности объема Ω из выражения (15.20) следует тождество

$$\delta_L L(x) + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\delta x^\lambda L(x)) = 0, \quad (15.23)$$

которое получено Д. Гильбертом в 1915 г.

Совершая элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \delta_c S = \\ = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left[\frac{\delta L}{\delta A_\lambda} \delta_L A_\lambda + \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} \delta_L \gamma_{\mu\nu} + D_\lambda J^\lambda \right] = 0, \end{aligned} \quad (15.24)$$

здесь

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} &= \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\sigma \gamma_{\mu\nu})} \right), \\ J^\nu &= L \delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} \delta_L A_\lambda + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu \gamma_{\lambda\mu})} \delta_L \gamma_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (15.25)$$

Так как J^ν является плотностью вектора веса +1, то согласно (11.25) и (11.28) найдем

$$\partial_\nu J^\nu = D_\nu J^\nu, \quad (15.26)$$

где D^ν – ковариантная производная в псевдоевклидовом пространстве-времени. Следует отметить, что вариации $\delta_L A_\lambda$, $\delta_L \gamma_{\mu\nu}$ порождены преобразованием координат (15.14), а поэтому их можно выразить через компоненты δx^λ .

Найдем вариацию Ли от полевых переменных, возникающую из-за преобразования координат. Согласно закону преобразования вектора A_λ

$$A'_\lambda(x') = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda},$$

имеем

$$A'_\lambda(x + \delta x) = A_\lambda(x) - A_\nu(x) \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\lambda}. \quad (15.27)$$

Разлагая в ряд Тейлора величину $A'_\lambda(x + \delta x)$, находим

$$A'_\lambda(x + \delta x) = A'_\lambda(x) + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} \delta x^\nu. \quad (15.28)$$

Подставляя (15.28) в (15.27), получим

$$\delta_L A_\lambda(x) = -\delta x^\nu \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - A_\nu(x) \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad (15.29)$$

или в ковариантной форме

$$\delta_L A_\lambda(x) = -\delta x^\nu D_\nu A_\lambda - A_\nu D_\lambda \delta x^\nu. \quad (15.30)$$

Найдем теперь вариацию Ли от метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$.
Из закона преобразования

$$\gamma'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \gamma_{\lambda\sigma}(x)$$

получим

$$\gamma'_{\mu\nu}(x + \delta x) = \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\sigma} \partial_\nu \delta x^\sigma - \gamma_{\nu\sigma} \partial_\mu \delta x^\sigma, \quad (15.31)$$

откуда находим

$$\delta_L \gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\sigma} \partial_\nu \delta x^\sigma - \gamma_{\nu\sigma} \partial_\mu \delta x^\sigma - \delta x^\sigma \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu}. \quad (15.32)$$

Учитывая равенство

$$\partial_\sigma \gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \gamma_{\nu\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (15.33)$$

запишем выражение (15.32) в ковариантных производных

$$\delta_L \gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\sigma} D_\nu \delta x^\sigma - \gamma_{\nu\sigma} D_\mu \delta x^\sigma. \quad (15.34)$$

Подставляя выражения (15.30) и (15.34) в действие (15.24), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left[-\delta x^\lambda \frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - \frac{\delta L}{\delta A_\lambda} A_\nu D_\lambda \delta x^\nu - \right. \\ \left. - (\gamma_{\mu\sigma} D_\nu \delta x^\sigma + \gamma_{\nu\sigma} D_\mu \delta x^\sigma) \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + D_\nu J^\nu \right] = 0. \quad (15.35)$$

Введем следующее обозначение:

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}. \quad (15.36)$$

Мы увидим в дальнейшем, что эта величина, впервые введенная Гильбертом, является плотностью тензора энергии-импульса поля.

Интегрируя по частям в выражении (15.35), получим

$$\delta_c S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left\{ -\delta x^\lambda \left[\frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - \right. \right. \\ \left. - D_\nu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \right) + D_\nu (T^{\mu\nu} \gamma_{\mu\lambda}) \right] + \\ \left. + D_\nu \left(J^\nu - \frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \delta x^\lambda + T^{\mu\nu} \gamma_{\mu\sigma} \delta x^\sigma \right) \right\} = 0. \quad (15.37)$$

Подставляя в выражение (15.25) для плотности вектора J^ν значения вариаций $\delta_L A_\lambda(x)$, $\delta_L \gamma_{\mu\nu}(x)$ согласно формулам (15.30) и (15.34) и группируя члены при δx^ν и $D_\lambda \delta x^\nu$, получим

$$J^\nu - \frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \delta x^\lambda = -\tau_\sigma^\nu \delta x^\sigma - \sigma_\mu^{\nu\lambda} D_\lambda \delta x^\mu, \quad (15.38)$$

где мы обозначили

$$\tau_{\sigma}^{\nu} = -L\delta_{\sigma}^{\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}A_{\lambda})}D_{\sigma}A_{\lambda} + \frac{\delta L}{\delta A_{\nu}}A_{\sigma}. \quad (15.39)$$

Эту величину обычно называют **плотностью канонического тензора энергии-импульса**, а величину

$$\sigma_{\mu}^{\nu\lambda} = 2\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}\gamma_{\sigma\lambda})}\gamma_{\sigma\mu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}A_{\lambda})}A_{\mu} \quad (15.40)$$

– плотностью тензора спина.

В том случае, когда функция L зависит только от $\gamma^{\mu\nu}$, A_{μ} , $\partial_{\nu}A_{\mu}$ величина $\sigma_{\mu}^{\nu\lambda}$ может быть записана согласно (15.40) в форме

$$\sigma_{\mu}^{\nu\lambda} = \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}A_{\lambda})} \right) A_{\mu}. \quad (15.40a)$$

На основании (15.38) ковариантную дивергенцию в (15.37) представим в виде

$$\begin{aligned} D_{\nu} \left(J^{\nu} - \frac{\delta L}{\delta A_{\nu}} A_{\lambda} \delta x^{\lambda} + T_{\sigma}^{\nu} \delta x^{\sigma} \right) = \\ = \delta x^{\sigma} \left[D_{\nu} T_{\sigma}^{\nu} - D_{\nu} \tau_{\sigma}^{\nu} \right] + D_{\nu} (\delta x^{\lambda}) \times \\ \times \left[T_{\lambda}^{\nu} - \tau_{\lambda}^{\nu} - D_{\mu} \sigma_{\lambda}^{\mu\nu} \right] - \sigma_{\mu}^{\nu\lambda} D_{\nu} D_{\lambda} \delta x^{\mu}. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Используя это выражение, вариацию действия (15.37) можно записать в форме

$$\begin{aligned} \delta_c S = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \left[-\delta x^{\lambda} \left(\frac{\delta L}{\delta A_{\nu}} D_{\lambda} A_{\nu} - \right. \right. \\ \left. \left. - D_{\nu} \left(\frac{\delta L}{\delta A_{\nu}} A_{\lambda} \right) + D_{\nu} \tau_{\lambda}^{\nu} \right) + D_{\nu} (\delta x^{\lambda}) \times \right. \\ \left. \times (T_{\lambda}^{\nu} - \tau_{\lambda}^{\nu} - D_{\mu} \sigma_{\lambda}^{\mu\nu}) - \sigma_{\mu}^{\nu\lambda} D_{\nu} D_{\lambda} \delta x^{\mu} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15.42)$$

Так как объем интегрирования Ω произволен, то отсюда следует, что подинтегральная функция равна нулю:

$$\begin{aligned} & -\delta x^\lambda \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - D_\nu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \right) + D_\nu \tau_\lambda^\nu \right) + \\ & + \left(T_\lambda^\nu - \tau_\lambda^\nu - D_\mu \sigma_\lambda^{\mu\nu} \right) D_\nu \delta x^\lambda - \sigma_\mu^{\nu\lambda} D_\nu D_\lambda \delta x^\mu = 0. \end{aligned} \quad (15.43)$$

Это выражение обращается в нуль для произвольных δx^λ , независимо от выбора системы координат. Именно это позволяет легко установить, что тензор $\sigma_\mu^{\nu\lambda}$ антисимметричен по ν, λ . В силу антисимметрии $\sigma_\mu^{\nu\lambda}$ по верхним индексам ν и λ на основании (15.40а) получим

$$\left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\nu A_\lambda)} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\lambda A_\nu)} \right) = 0,$$

откуда следует, что функция L для данного случая зависит от производных поля следующим образом:

$$L(F_{\nu\lambda}),$$

где

$$F_{\nu\lambda} = D_\nu A_\lambda - D_\lambda A_\nu.$$

Это положение было установлено Д. Гильбертом в 1915 г. Оно конечно не исключает непосредственной зависимости L от переменной A_ν .

В силу тензорного закона преобразования, если (15.43) обращается в нуль в одной системе координат, то оно равно нулю в любой другой системе координат. Отсюда следуют тождества

$$D_\nu \tau_\lambda^\nu + \frac{\delta L}{\delta A_\nu} D_\lambda A_\nu - D_\nu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} A_\lambda \right) = 0, \quad (15.44)$$

$$T_\lambda^\nu - \tau_\lambda^\nu - D_\mu \sigma_\lambda^{\mu\nu} = 0, \quad \sigma_\mu^{\nu\lambda} = -\sigma_\mu^{\lambda\nu}. \quad (15.45)$$

Что касается последнего члена в (15.43), то он должен обращаться в нуль в силу антисимметрии величины $\sigma_\mu^{\nu\lambda}$ по верхним индексам. Из антисимметрии тензора спина следует

$$D_\nu T_\lambda^\nu = D_\nu \tau_\lambda^\nu. \quad (15.46)$$

Тождества (15.44) и (15.45) называются сильными законами сохранения, они выполняются в силу инвариантности действия при преобразовании координат. Используя соотношение (15.46), выражение (15.44) можно записать в форме

$$D_\nu T_\lambda^\nu + \frac{\delta L}{\delta A_\nu} F_{\lambda\nu} - A_\lambda D_\nu \left(\frac{\delta L}{\delta A_\nu} \right) = 0, \quad (15.47)$$

$$F_{\lambda\nu} = D_\lambda A_\nu - D_\nu A_\lambda.$$

Если мы учтем уравнения поля (15.12), то получим

$$D_\nu T_\lambda^\nu = 0, \quad T_\lambda^\nu - \tau_\lambda^\nu = D_\mu \sigma_\lambda^{\mu\nu}, \quad (15.48)$$

здесь величина τ_λ^ν равна

$$\tau_\lambda^\nu = -L\delta_\lambda^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} D_\lambda A_\mu. \quad (15.49)$$

Наличие слабого закона сохранения симметрического тензора энергии-импульса обеспечивает сохранение тензора момента импульса поля. Определяя тензор момента импульса в галилеевых координатах инерциальной системы

$$M^{\mu\nu\lambda} = x^\nu T^{\mu\lambda} - x^\mu T^{\nu\lambda}, \quad (15.50)$$

легко установить с помощью (15.48), что

$$\partial_\lambda M^{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (15.51)$$

Полученные нами слабые законы сохранения для тензора энергии-импульса и тензора момента импульса еще не свидетельствуют о сохранении энергии-импульса или момента количества движения для замкнутой системы.

Существование интегральных законов сохранения для замкнутой системы связано со свойствами пространства-времени, а именно, с существованием группы движения пространства-времени. Наличие группы Пуанкаре (группа Лоренца совместно с группой трансляции) для псевдоевклидова пространства обеспечивает существование законов сохранения энергии, импульса и момента количества движения для замкнутой системы [6]. Группа движения пространства-времени сохраняет форминвариантность метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского.

Остановимся подробнее на этом. Плотность тензора энергии-импульса вещества согласно (15.36) равна

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}, \quad (15.52)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right).$$

Эта плотность тензора удовлетворяет соотношению (15.48)

$$D_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (15.53)$$

которое можно записать в форме

$$\partial_\nu T^\nu_\mu + \frac{1}{2} T_{\sigma\nu} \partial_\mu g^{\sigma\nu} = 0. \quad (15.54)$$

Выражение (15.53) в общем случае не может быть представлено в виде обычной дивергенции, а поэтому не указывает на сохранение чего-либо. Однако выражение вида

$$D_\nu A^\nu, \quad (15.55)$$

где A^ν – произвольный вектор, легко представляется в виде дивергенции даже в римановом пространстве.

На основании (11.25) имеем

$$D_\lambda A^\lambda = \partial_\lambda A^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda A^\mu. \quad (15.56)$$

Используя (11.38), получим

$$D_\lambda(\sqrt{-\gamma} A^\lambda) = \partial_\lambda(\sqrt{-\gamma} A^\lambda). \quad (15.57)$$

Этим обстоятельством мы и воспользуемся. Умножим плотность энергии-импульса на вектор η_ν

$$T^{\mu\nu} \eta_\nu. \quad (15.58)$$

Согласно (15.57) получим

$$D_\mu(T^{\mu\nu} \eta_\nu) = \partial_\mu(T^{\mu\nu} \eta_\nu). \quad (15.59)$$

В нашем случае величина (15.58) уже является плотностью вектора. Поэтому в (15.59) не надо вставлять величину $\sqrt{-\gamma}$. Соотношение (15.59) запишем в виде

$$\frac{1}{2} T^{\mu\nu} (D_\mu \eta_\nu + D_\nu \eta_\mu) = \partial_\mu (T^{\mu\nu} \eta_\nu). \quad (15.60)$$

Интегрируя (15.60) по объему, содержащему вещество, получим

$$\frac{1}{2} \int_V dV T^{\mu\nu} (D_\mu \eta_\nu + D_\nu \eta_\mu) = \frac{\partial}{\partial x^0} \int_V (T^{\nu 0} \eta_\nu) dV. \quad (15.61)$$

В том случае, если вектор η_ν удовлетворяет уравнению Киллинга

$$D_\mu \eta_\nu + D_\nu \eta_\mu = 0, \quad (15.62)$$

мы имеем интеграл движения

$$\int_V T^{\nu 0} \eta_\nu dV = \text{const.} \quad (15.63)$$

Ранее мы получили выражение (15.34):

$$\delta_L \gamma_{\mu\nu} = -(D_\nu \delta x_\mu + D_\mu \delta x_\nu). \quad (15.64)$$

Из уравнений (15.62) следует, что при их выполнении имеет место форминвариантность метрики

$$\delta_L \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (15.65)$$

В случае псевдоевклидовой геометрии (пространство Минковского) уравнения (15.62) можно записать в галилеевой (декартовой) системе координат:

$$\partial_\mu \eta_\nu + \partial_\nu \eta_\mu = 0. \quad (15.66)$$

Это уравнение имеет общее решение

$$\eta_\nu = a_\nu + \omega_{\nu\sigma} x^\sigma, \quad \omega_{\nu\sigma} = -\omega_{\sigma\nu}, \quad (15.67)$$

содержащее десять произвольных параметров $a_\nu, \omega_{\mu\nu}$. Это означает, что существуют десять независимых векторов Киллинга, а, следовательно, существуют и десять интегралов движения. Выбирая

$$\eta_\nu = a_\nu \quad (15.68)$$

и подставляя в (15.63), находим четыре интеграла движения:

$$P^\nu = \frac{1}{c} \int_V T^{\nu 0} dV = \text{const.} \quad (15.69)$$

Здесь P^0 – есть энергия системы, а P^i представляет количество движения системы. Выбирая вектор Киллинга в виде

$$\eta_\nu = \omega_{\nu\sigma} x^\sigma \quad (15.70)$$

и подставляя его в исходное выражение (15.63), получим выражение для плотности тензора момента количества движения:

$$P^{\sigma\nu} = \frac{1}{c} \int (T^{\nu 0} x^\sigma - T^{\sigma 0} x^\nu) dV. \quad (15.71)$$

Величины P^{i0} являются интегралами движения центра инерции, а величины P^{ik} – интегралами момента количества движения системы.

В соответствии с (15.50) введем величину

$$P^{\sigma\nu\lambda} = \frac{1}{c} \int (T^{\nu\lambda} x^\sigma - T^{\sigma\lambda} x^\nu) dV, \quad (15.72)$$

где

$$M^{\sigma\nu\lambda} = T^{\nu\lambda} x^\sigma - T^{\sigma\lambda} x^\nu \quad (15.73)$$

– есть плотность тензора, которая удовлетворяет условию

$$\partial_\lambda M^{\sigma\nu\lambda} = 0. \quad (15.74)$$

Таким образом, мы убедились, получив формулы (15.69) и (15.71), что все эти десять интегралов движения возникли на основании псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Именно в ней существуют десять независимых векторов Киллинга. Десять векторов Киллинга существуют также и в римановом пространстве, но только с постоянной кривизной [6].

Заметим, что законы сохранения автоматически выполняются для произвольной плотности скаляра (лагранжиан) вида $L(\psi_\lambda, \partial_\sigma \psi_\mu)$ в пространстве Минковского, обеспечивающего положительность энергии поля, если мы ограничиваемся

только уравнениями второго порядка для полей. Я упоминаю здесь об этом специально, поскольку из дискуссии с некоторыми академиками, занимающимися теоретической физикой, я увидел, что даже им это неизвестно.

Найдем теперь, в качестве примера, симметрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Согласно (10.5) плотность лагранжиана для этого поля равна

$$L_f = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-\gamma} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (15.75)$$

Запишем ее через переменные $F_{\mu\nu}$ и метрические коэффициенты

$$L_f = -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-\gamma} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu}. \quad (15.76)$$

Согласно (11.37) имеем

$$\frac{\partial \sqrt{-\gamma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu}. \quad (15.77)$$

С помощью (15.77) получим

$$\frac{\partial^* L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{32\pi} \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (15.78)$$

* – указывает, что дифференцирование идет по $\gamma_{\mu\nu}$, входящей в выражение (15.76).

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^* L}{\partial \gamma^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{16\pi} \sqrt{-\gamma} F_{\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} \times \\ &\times \left[\frac{\partial \gamma^{\alpha\sigma}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \cdot \gamma^{\beta\lambda} + \gamma^{\alpha\sigma} \cdot \frac{\partial \gamma^{\beta\lambda}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (15.79)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha\sigma}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\sigma + \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\sigma),$$

то учитывая свойства антисимметрии тензора $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, получим

$$\frac{\partial^* L}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = -\frac{1}{8\pi} \sqrt{-\gamma} F_{\mu\lambda} F_{\nu\sigma} \gamma^{\lambda\sigma}. \quad (15.80)$$

При получении (15.78) и (15.80) мы рассматривали величины $\gamma_{\mu\nu}, \gamma^{\lambda\sigma}$ как независимые.

Так как в плотность лагранжиана электромагнитного поля не входят производные от метрического тензора, то плотность симметрического тензора энергии-импульса будет равна

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -2 \left[\frac{\partial^* L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial^* L}{\partial \gamma^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \right]. \quad (15.81)$$

Из соотношения

$$\gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\nu} = \delta_\nu^\alpha \quad (15.82)$$

находим

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} (\gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \gamma^{\beta\mu}). \quad (15.83)$$

Подставляя это выражение в (15.81), получим

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -2 \left[\frac{\partial^* L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial^* L}{\partial \gamma^{\alpha\beta}} \gamma^{\alpha\mu} \gamma^{\beta\nu} \right]. \quad (15.84)$$

Используя выражения (15.78) и (15.80), находим плотность тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{4\pi} \left[-F^{\mu\sigma} F^{\nu\lambda} \gamma_{\sigma\lambda} + \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]. \quad (15.85)$$

Отсюда легко убедиться, что след тензора энергии-импульса электромагнитного поля обращается в нуль, т. е.

$$T = \gamma_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0.$$

Построим теперь тензор энергии-импульса вещества. Плотность сохраняющейся массы или заряда на основании (11.41) равна

$$\mu = \sqrt{-\gamma} \mu_0 U^0, \quad \partial_\nu (\sqrt{-\gamma} \mu_0 U^\nu) = 0, \quad (15.86)$$

μ_0 – плотность в системе покоя. Четырехмерная скорость U^ν определяется выражением

$$U^\nu = \frac{v^\nu}{\sqrt{\gamma_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}}, \quad v^\nu = \frac{dx^\nu}{dt}, \quad v^0 \equiv c. \quad (15.87)$$

Отсюда очевидно, что

$$U^\nu U^\lambda \gamma_{\nu\lambda} = 1.$$

Возьмем вариацию от выражения (15.86) по метрическому тензору. Величина μ не зависит от метрического тензора, поэтому

$$\delta\mu = U^0 \delta(\sqrt{-\gamma} \mu_0) + \sqrt{-\gamma} \mu_0 \delta U^0 = 0, \quad (15.88)$$

здесь

$$\delta U^0 = -\frac{c}{2} \frac{v^\alpha v^\beta \delta\gamma_{\alpha\beta}}{(\gamma_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta)^{3/2}}. \quad (15.89)$$

Из выражений (15.88) и (15.89) находим

$$\delta(\sqrt{-\gamma} \mu_0) = \sqrt{-\gamma} \mu_0 \frac{1}{2} U^\alpha U^\beta \delta\gamma_{\alpha\beta}. \quad (15.90)$$

Поскольку плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L = -\sqrt{-\gamma} \mu_0 c^2, \quad (15.91)$$

то тензор энергии-импульса вещества будет равен

$$\sqrt{-\gamma} t^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}. \quad (15.92)$$

На основании (15.90) получим

$$t^{\mu\nu} = \mu_0 c^2 U^\mu U^\nu. \quad (15.93)$$

Учитывая (15.86) в декартовой системе координат, получим

$$\partial_\nu t^{\mu\nu} = \mu_0 c^2 \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} \cdot \frac{dx^\nu}{ds} = \mu_0 c^2 \frac{dU^\mu}{ds}. \quad (15.94)$$

Перепишем уравнение (10.22) для плотностей массы и заряда:

$$\mu_0 c^2 \frac{dU^\mu}{ds} = \rho_0 F^{\mu\lambda} U_\lambda = f^\mu. \quad (15.95)$$

Сравнивая (15.94) и (15.95), имеем

$$f_\nu = \partial_\alpha t_\nu^\alpha. \quad (15.96)$$

На основании (8.54) и (15.96) мы видим, что имеет место закон сохранения тензора энергии-импульса электромагнитного поля и зарядов вместе взятых:

$$\partial_\alpha (T_\nu^\alpha + t_\nu^\alpha) = 0. \quad (15.97)$$

Как мы отмечали выше, добавление к плотности лагранжиана ковариантной дивергенции не изменяет уравнения поля. Можно также показать [6], что оно не изменяет и плотности тензора энергии-импульса Гильберта. Тогда как плотность канонического тензора (15.49) при этом изменяется. Но одновременно с ним изменяется и дивергенция от плотности тензора спина. Сумма плотности канонического тензора и дивергенции плотности спина остается неизменной.

§ 16. Пространство скоростей Лобачевского

Напомним, что релятивистская формула сложения скоростей (см. (9.26)) имеет вид:

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{v} \vec{u}}{c^2}\right)^2}. \quad (16.1)$$

Заметим, что это выражение является непосредственным следствием инварианта

$$\gamma_u \gamma_v (1 - \vec{u} \vec{v}) = \text{inv.}$$

Здесь $\gamma_u = (1 - u^2)^{-1/2}$, $\gamma_v = (1 - v^2)^{-1/2}$.

Этот инвариант впервые приведен в статье А. Пуанкаре [3] (см. § 9, формула 5) в системе единиц, где скорость света принята равной 1.

Именно отсюда следует, что в псевдоевклидовой геометрии пространства-времени пространство скоростей следует геометрии Лобачевского.

Для дальнейшего удобнее ввести следующие обозначения

$$v' = v_a, \quad v = v_b, \quad u = v_c, \quad (16.2)$$

$$\text{ch } a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad \text{sh } a = \frac{v_a}{c \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}, \quad \text{th } a = \frac{v_a}{c}. \quad (16.3)$$

Подставляя (16.2) и (16.3) в (16.1), получим

$$\text{ch } a = \text{ch } b \cdot \text{ch } c - \text{sh } b \cdot \text{sh } c \cdot \cos A, \quad (16.4)$$

A — угол между скоростями $\vec{v}_b$ и $\vec{v}_c$. Но это не что иное, как **теорема косинусов для треугольника в геометрии Лобачевского**. Она выражает длину стороны треугольника через длину двух сторон и угол между ними. Находя отсюда $\cos A$, затем $\sin A$ и т. д., легко установить **теорему синусов геометрии Лобачевского**

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}. \quad (16.5)$$

Ниже, следуя Лобачевскому, получим для треугольника **теорему косинусов** в виде

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a. \quad (16.6)$$

Запишем (16.4) в форме

$$\operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A = 1 - \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}. \quad (16.7)$$

На основании теоремы синусов (16.5) имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch} c} = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\operatorname{th} c}{\operatorname{sh} a}. \quad (16.8)$$

Подставляя это выражение в (16.7), находим

$$\operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A = 1 - \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\operatorname{th} c}{\operatorname{ch} b \operatorname{th} a}. \quad (16.9)$$

Отсюда находим $\operatorname{th} c$

$$\operatorname{th} c = \frac{\operatorname{th} a \sin C}{\cos A \sin C \operatorname{th} a \operatorname{th} b + \frac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}. \quad (16.10)$$

Далее, Лобачевский с помощью **теорем косинусов** (16.4) установил тождество

$$(1 - \operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A)(1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos C) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b}. \quad (16.11)$$

Используя (16.10), находим

$$1 - \operatorname{th} b \operatorname{th} c \cos A = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}{\cos A \sin C \operatorname{th} a \operatorname{th} b + \frac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}. \quad (16.12)$$

Подставляя это выражение в тождество (16.11), получим

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b} = \frac{\sin A - \sin A \cos C \operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\cos A \sin C \operatorname{th} a \operatorname{th} b + \frac{1}{\operatorname{ch} b} \sin A}. \quad (16.13)$$

С учетом

$$1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b} = \operatorname{th}^2 b, \quad (16.14)$$

равенство (16.13) принимает вид

$$\frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} a} - \cos C = \operatorname{ctg} A \frac{\sin C}{\operatorname{ch} b}. \quad (16.15)$$

Аналогично получается и соотношение

$$\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} b} - \cos C = \operatorname{ctg} B \frac{\sin C}{\operatorname{ch} a}. \quad (16.16)$$

На основании **теоремы синусов** имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch} b} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}. \quad (16.17)$$

Подставляя это выражение в (16.15), получим

$$1 - \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} b} \cos C = \frac{\cos A \sin C}{\operatorname{ch} a \sin B}. \quad (16.18)$$

Используя выражения (16.16) в (16.18), находим

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a. \quad (16.19)$$

Аналогично получаются равенства

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \operatorname{ch} b, \quad (16.20)$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \operatorname{ch} c.$$

Таким образом, пространство скоростей в псевдоевклидовой геометрии является пространством Лобачевского.

Для прямоугольного треугольника $C = \frac{\pi}{2}$, согласно (16.4) имеем

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \quad (16.21)$$

На основании теоремы синусов (16.5) и косинусов (16.4) получим

$$\sin A = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}, \quad \cos A = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}. \quad (16.22)$$

Наряду с очевидным равенством

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad (16.23)$$

можно, используя выражения (16.22) и (16.21), получить соотношение

$$\sin^2 A \operatorname{ch}^2 b + \cos^2 A \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} = 1. \quad (16.24)$$

Рассмотрим в качестве примера [15] явление **абберации света**, т. е. изменение направления луча света при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Таким образом, в двух движущихся одна относительно другой системах отсчета направления на один и тот же источник C будут различными. Пусть θ и θ' это углы, под которыми виден свет от источника в точке C из двух инерциальных систем отсчета A и B , движущихся одна относительно другой со скоростью v . В пространстве скоростей Лобачевского мы построим треугольник ACB (см. рис. 1), у которого угол C равен нулю, поскольку свет имеет предельную скорость.

Соединим точки A и B линией и опустим на эту линию из точки C перпендикуляр. Он пересечет ее в точке D . Расстояние от точки A до точки D обозначим через x , а расстояние от точки D до B через y . Применяя для данного треугольника

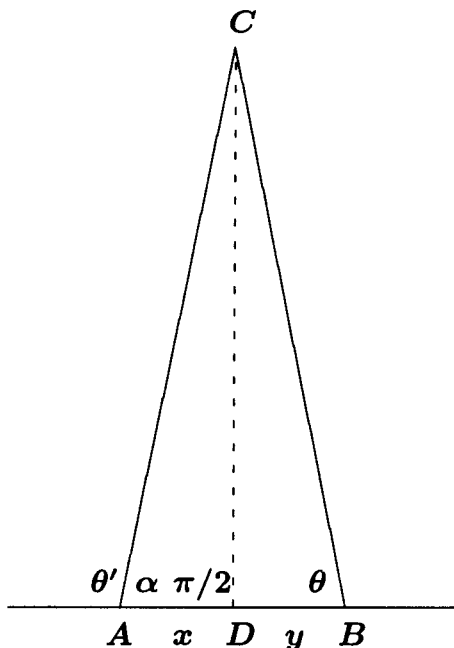


Рис. 1

к ACD теорему косинусов (16.20), получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (16.25)$$

отсюда

$$\operatorname{th} x = \cos \alpha = \cos(\pi - \theta') = -\cos \theta', \quad (16.26)$$

аналогично

$$\operatorname{th} y = \cos \theta. \quad (16.27)$$

Согласно формуле (16.3), $\text{th}(x + y)$ является относительной скоростью одной системы отсчета относительно другой, отнесенной к скорости света

$$\frac{v}{c} = \text{th}(x + y) = \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{th } y} = \frac{\cos \theta - \cos \theta'}{1 - \cos \theta \cdot \cos \theta'}. \quad (16.28)$$

Отсюда получаются известные формулы **абберации**

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}, \quad (16.29)$$

$$\sin \theta' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\sin \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)}. \quad (16.30)$$

Используя формулы (16.29) и (16.30), получим

$$\cos(\theta - \theta') = \frac{\left(\cos \theta - \frac{v}{c}\right) \cos \theta + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin^2 \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (16.31)$$

Определим квадрат расстояния между бесконечно близкими точками пространства Лобачевского. На основании (16.1) находим

$$\vec{v}'^2 = \frac{(\vec{u} - \vec{v})^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{u}, \vec{v}]^2}{\left(1 - \frac{\vec{u}\vec{v}}{c^2}\right)^2}, \quad (16.32)$$

v' — относительная скорость.

Полагая $\vec{u} = \vec{v} + d\vec{v}$, и подставляя в (16.32), находим

$$(d\ell_v)^2 = c^2 \frac{(c^2 - v^2)(d\vec{v})^2 + (\vec{v}d\vec{v})^2}{(c^2 - v^2)^2}. \quad (16.33)$$

Переходя к сферическим координатам в пространстве скоростей

$$v_x = v \sin \theta \cos \phi, \quad v_y = v \sin \theta \sin \phi, \quad v_z = v \cos \theta, \quad (16.34)$$

получим

$$(d\ell_v)^2 = c^2 \left[\frac{c^2 (dv)^2}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{v^2}{(c^2 - v^2)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (16.35)$$

Отсюда очевидно, что отношение длины окружности к радиусу равно

$$\frac{\ell}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (16.36)$$

и всегда больше 2π .

Введем новую переменную

$$r = \frac{cv}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (16.37)$$

которая изменяется от нуля до бесконечности. В новых переменных имеем

$$d\ell_v^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{c^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (16.38)$$

если ввести переменную

$$r = c \operatorname{sh} Z, \quad (16.39)$$

то получим

$$d\ell_v^2 = c^2 dZ^2 + c^2 \operatorname{sh}^2 Z (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (16.40)$$

В такой форме обычно записывается пространственная метрика в космологии при рассмотрении открытой Вселенной.

Далее остановимся описательно на некоторых теоремах геометрии Лобачевского, следуя книге *Ефимова Н.В.* (Высшая геометрия. М.: Наука, 1978) и лекциям *Черникова Н.А.* в Новосибирском государственном университете, опубликованным в виде препринта в 1965 г.

В геометрии Лобачевского через точку A , не лежащую на прямой a , проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающих прямую a . Но не все эти прямые считаются параллельными прямой a . Пусть a некоторая прямая на плоскости и A точка вне ее (см. рис. 2), b и c – граничные прямые, не пересекающие прямую a . Любая прямая, проходящая через точку A в углу β также не будет пересекать прямую a , тогда как любая прямая, проходящая через точку A в углу, содержащем точку B , обязательно будет пересекать прямую a . Прямую b называют правой граничной прямой, а c – левой. Оказывается, это свойство сохраняется для любой точки, лежащей на прямой b . Именно такая граничная прямая b и является параллельной a в правом направлении, а c – в левом. Таким образом, через

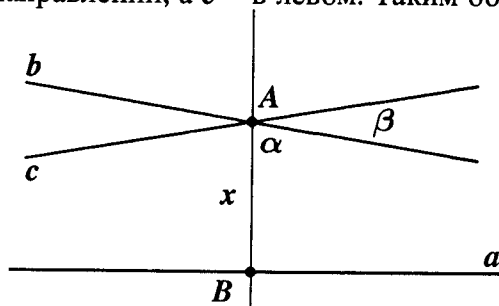


Рис. 2

одну любую точку можно провести две прямых, параллельных a – одну вправо, другую влево. В геометрии Лобачевского доказывается теорема взаимности: если одна из двух прямых параллельна другой в некотором направлении, то вторая

параллельна первой в том же направлении. Аналогично также устанавливается, что две прямые, параллельные третьей в одном направлении, параллельны и между собой в том же направлении. Две прямые, перпендикулярные третьей, являются расходящимися. Две расходящиеся прямые всегда имеют один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они друг от друга неограниченно расходятся.

Параллельные прямые, неограниченно удаляясь друг от друга в одном направлении, асимптотически сближаются в другом. Угол α называется углом параллельности при точке A по отношению к прямой a .

На основании теоремы косинусов (16.6) находим

$$1 = \sin \alpha \operatorname{ch} x.$$

При получении этого выражения мы учли, что прямая b асимптотически приближается к прямой a , а поэтому угол, образованный прямыми a и b , равен нулю. Отсюда получим формулу Лобачевского

$$\alpha(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-x},$$

здесь x – расстояние от точки A прямой a . Эта функция играет в геометрии Лобачевского фундаментальную роль. Именно на ее основе строится геометрия. В нашем изложении этого не видно, поскольку мы получили геометрию Лобачевского как геометрию пространства скоростей, исходя из псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Функция $\alpha(x)$ является монотонно убывающей. Площадь треугольника равна

$$S = d^2 \cdot (\pi - A - B - C), \quad (16.41)$$

здесь d – постоянная величина. Ниже мы дадим вывод этой формулы. Из этой формулы видно, что в геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников.

Следуя Лобачевскому, выразим функцию

$$\cos \Delta, \quad \text{где} \quad 2\Delta = A + B + C, \quad (16.42)$$

через стороны треугольника. Используя теорему косинусов (16.6), а также формулы

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}, \quad (16.43)$$

находим

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-b) \cdot \operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \quad (16.44)$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh} p \cdot \operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}, \quad (16.45)$$

здесь p – полупериметр треугольника

$$2p = a + b + c.$$

С помощью формул (16.44) и (16.45) получим

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-b)}{\operatorname{sh} c} \cos \frac{C}{2}, \quad (16.46)$$

$$\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a)}{\operatorname{sh} c} \cos \frac{C}{2}. \quad (16.47)$$

Отсюда имеем

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\operatorname{ch} \frac{c}{2}} \cos \frac{C}{2}. \quad (16.48)$$

Используя формулы

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sh} p}{\operatorname{sh} c} \sin \frac{C}{2}, \quad (16.49)$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} c} \sin \frac{C}{2}, \quad (16.50)$$

находим

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{a+b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2}. \quad (16.51)$$

На основании (16.48) и (16.51) имеем

$$\cos \Delta = 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (16.52)$$

Заменяя в (16.52) $\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$ выражением из формул (16.44) и (16.45), находим

$$\cos \Delta = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} p \cdot \operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c)}}{2 \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2}}. \quad (16.53)$$

На основании (16.41) имеем равенство

$$\sin \frac{S}{2d^2} = \cos \Delta. \quad (16.54)$$

Сравнивая (16.53) и (16.54), получим

$$\sin \frac{S}{2d^2} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh} p \cdot \operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c)}}{2 \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2}}. \quad (16.55)$$

В наших формулах стороны a, b, c являются безразмерными величинами по определению (16.3). Формула (16.55) является

аналогом формулы Герона в евклидовой геометрии. На основании (16.52) выражение для площади треугольника можно записать и в таком виде

$$\sin \frac{S}{2d^2} = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} \frac{c}{2}} \sin C. \quad (16.56)$$

Площадь S выражена в безразмерных единицах, так как стороны треугольника безразмерны. В нашем рассмотрении, на основании теоремы косинусов (16.4), постоянная d равна единице.

Из формулы (16.41) следует, что в геометрии Лобачевского площадь треугольника не может быть сколь угодно большой, она ограничена величиной $d^2\pi$. Таким образом, допущение существования треугольника сколь угодно большой площади эквивалентно аксиоме Евклида о параллельности. Площади многоугольников в геометрии Лобачевского могут быть сколь угодно большими.

Площадь сферического треугольника в геометрии Евклида равна

$$S_{\Delta} = R^2(A + B + C - \pi), \quad (16.57)$$

здесь R — радиус сферы. Сравнивая это выражение с формулой (16.41), мы видим, что формула (16.41) может быть получена из формулы (16.57), если выбрать радиус сферы мнимый, равный величине $R = id$. Это обстоятельство было замечено еще Ламбертом.

Если ввести переменные

$$x = \frac{v_x}{c}, \quad y = \frac{v_y}{c}, \quad z = \frac{v_z}{c}, \quad (16.58)$$

то формула (16.33) для геометрии Лобачевского на плоскости

x, y принимает вид

$$(d\ell_v)^2 = c^2 \frac{(1 - y^2) \cdot (dx)^2 + 2xy dx dy + (1 - x^2) \cdot (dy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad (16.59)$$

величины x, y в геометрии Лобачевского называются координатами Бельтрами.

Переходя к новым переменным ξ, η с помощью формул

$$x = \operatorname{th} \xi, \quad y = \frac{\operatorname{th} \eta}{\operatorname{ch} \xi}, \quad (16.60)$$

и вычисляя дифференциалы

$$dx = \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^2 \xi}, \quad dy = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta \operatorname{ch} \xi} d\eta - \frac{\operatorname{th} \eta}{\operatorname{ch}^2 \xi} \operatorname{sh} \xi d\xi,$$

после соответствующих вычислений, находим

$$(d\ell_v)^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 \eta d\xi^2 + d\eta^2). \quad (16.61)$$

Сеть координатных линий

$$\xi = \operatorname{const}, \quad \eta = \operatorname{const}, \quad (16.62)$$

ортогональна. Площадь треугольника в этих переменных равна

$$S = \iint_{(\Delta)} \operatorname{ch} \eta d\xi d\eta. \quad (16.63)$$

Для вычисления площади треугольника по формуле (16.63) нам необходимо найти геодезическую (экстремальную) линию в геометрии Лобачевского в координатах ξ, η . Для этой цели воспользуемся принципом стационарного действия.

Длина равна

$$\begin{aligned} L &= \int ds = \int \sqrt{\text{ch}^2 \eta \cdot d\xi^2 + d\eta^2} = \\ &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \sqrt{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}. \end{aligned} \quad (16.64)$$

Отсюда экстремальная кривая находится согласно условию

$$\delta L = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\xi' \cdot \text{ch}^2 \eta \cdot \delta(\xi')}{\sqrt{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}} \cdot d\eta = 0, \quad \xi' = \frac{d\xi}{d\eta}. \quad (16.65)$$

Вариация δ коммутативна с дифференцированием, т. е.

$$\delta(\xi') = (\delta\xi)'; \quad (16.66)$$

учитывая это и проводя в интеграле (16.65) интегрирование по частям, получим

$$\delta L = - \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \delta\xi \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'}{\sqrt{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}} \right) = 0. \quad (16.67)$$

Здесь учтено, что вариации $\delta\xi$ на конечных точках интегрирования равны нулю.

Из равенства (16.67), в силу произвольности вариации $\delta\xi$, следует

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'}{\sqrt{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}} \right) = 0. \quad (16.68)$$

Отсюда находим уравнение для геодезической линии

$$\frac{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'}{\sqrt{\text{ch}^2 \eta \cdot \xi'^2 + 1}} = c; \quad (16.69)$$

геодезические линии, как кратчайшие в геометрии Лобачевского, являются в ней прямыми линиями.

Решая это уравнение, получим

$$\xi - \xi_0 = \pm c \int \frac{d\eta}{\operatorname{ch} \eta \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - c^2}}. \quad (16.70)$$

Проводя замену переменной интегрирования

$$u = \operatorname{th} \eta, \quad (16.71)$$

находим

$$\begin{aligned} \xi - \xi_0 &= \pm \int \frac{c du}{\sqrt{(1 - c^2) + c^2 u^2}} = \\ &= \pm \int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \pm \operatorname{arcsch} v. \end{aligned} \quad (16.72)$$

Здесь

$$v = \frac{cu}{\sqrt{1 - c^2}}. \quad (16.73)$$

Удобно выбрать для постоянной c следующее обозначение

$$c = \sin \delta. \quad (16.74)$$

Таким образом, уравнение геодезической линии имеет вид

$$\operatorname{sh}(\xi - \xi_0) = \pm \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{th} \eta. \quad (16.75)$$

Построим треугольник в плоскости ξ, η (рис. 3). Линии AB и AC – геодезические, проходящие через точку $(\xi_0, 0)$. Углы A_1 и A_2 меньше угла параллельности α .

$$A = A_1 + A_2.$$

Из выражения (16.75) находим производную к геодезической линии AC в точке ξ_0

$$\xi'_0 = -\operatorname{tg} \delta_2. \quad (16.76)$$

Отсюда и из $\triangle ALP$ имеем

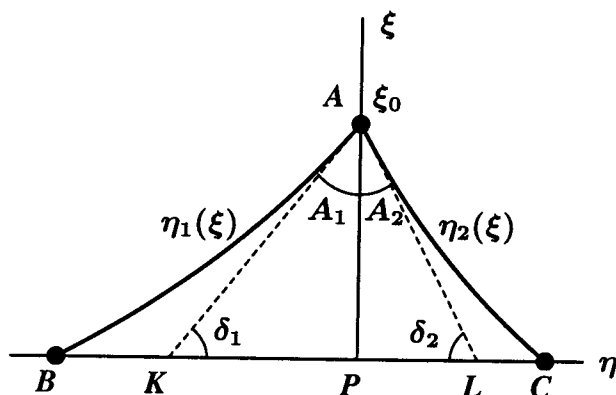


Рис. 3

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2} - A_2, \quad (16.77)$$

аналогично и для геодезической линии AB из $\triangle AKP$ находим

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} - A_1. \quad (16.78)$$

Таким образом, постоянная c для каждой геодезической линии выражена через углы A_1, A_2 . Геодезические линии AB и AC пересекают ось η в точках η_1^0, η_2^0 .

Площадь треугольника ABC согласно (16.63) равна

$$S_{\Delta} = \int_0^{\xi_0} d\xi \int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} \operatorname{ch} \eta \cdot d\eta = \int_0^{\xi_0} \{ \operatorname{sh} \eta_2(\xi) - \operatorname{sh} \eta_1(\xi) \} d\xi. \quad (16.79)$$

Используя выражение (16.75), находим

$$\operatorname{sh} \eta = \pm \frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{\cos^{-2} \delta - \operatorname{ch}^2(\xi - \xi_0)}}. \quad (16.80)$$

Отсюда получим

$$\operatorname{sh} \eta_2(\xi) = - \frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{\sin^{-2} A_2 - \operatorname{ch}^2(\xi - \xi_0)}}, \quad (16.81)$$

$$\operatorname{sh} \eta_1(\xi) = \frac{\operatorname{sh}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{\sin^{-2} A_1 - \operatorname{ch}^2(\xi - \xi_0)}}. \quad (16.82)$$

Тогда точки пересечения геодезических линий с прямой $\eta(\xi = 0)$

$$\operatorname{sh} \eta_2^0 = \frac{\operatorname{sh} \xi_0}{\sqrt{\sin^{-2} A_2 - \operatorname{ch}^2 \xi_0}}, \quad (16.83)$$

$$\operatorname{sh} \eta_1^0 = - \frac{\operatorname{sh} \xi_0}{\sqrt{\sin^{-2} A_1 - \operatorname{ch}^2 \xi_0}}. \quad (16.84)$$

По теореме синусов (16.5) имеем

$$\sin B = \operatorname{sh} \xi_0 \cdot \frac{\sin A_1}{\operatorname{sh} |\eta_1^0|}. \quad (16.85)$$

Подставляя в это выражение значение η_1^0 (16.84), получим

$$\sin B = \sqrt{1 - \sin^2 A_1 \operatorname{ch}^2 \xi_0}, \quad \cos B = \sin A_1 \operatorname{ch} \xi_0. \quad (16.86)$$

Аналогично

$$\cos C = \sin A_2 \operatorname{ch} \xi_0. \quad (16.87)$$

Вводя переменную

$$u = \operatorname{ch}(\xi - \xi_0) \quad (16.88)$$

в интеграле (16.79), получим

$$S_{\Delta} = \int_1^{\operatorname{ch} \xi_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sin^{-2} A_1 - u^2}} + \frac{1}{\sqrt{\sin^{-2} A_2 - u^2}} \right\} du. \quad (16.89)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} S_{\Delta} = & \arcsin(\sin A_1 \operatorname{ch} \xi_0) + \\ & + \arcsin(\sin A_2 \operatorname{ch} \xi_0) - (A_1 + A_2). \end{aligned} \quad (16.90)$$

Учитывая (16.86) и (16.87), получим

$$S_{\Delta} = \arcsin(\cos B) + \arcsin(\cos C) - A. \quad (16.91)$$

Окончательно имеем

$$S_{\Delta} = \pi - A - B - C. \quad (16.92)$$

Мы получили выражение для площади треугольника S_{Δ} в геометрии Лобачевского, которое ранее (16.41) использовали при нахождении формулы (16.55).

Из предыдущего мы видели, что геометрия Лобачевского, созданная им как “воображаемая геометрия”, вошла составной частью в физику релятивистских движений как геометрия пространства скоростей.

Открытие Лобачевского оказало большое влияние на развитие различных разделов математики. Так например, французский математик Ж. Адамар в книге “Неевклидова геометрия” в главе, посвященной теории автоморфных функций, отмечал:

“Мы надеемся, что нам удалось показать, как открытие Лобачевского пронизывает насквозь все замечательное творение Пуанкаре, для которого оно, по мысли самого Пуанкаре, явилось фундаментом. Мы уверены, что открытие Лобачевского еще будет играть большую роль и на дальнейших этапах развития рассмотренной нами теории”.

Бельтрами поставил вопрос: “Можно ли реализовать планиметрию Лобачевского в виде внутренней геометрии некоторой поверхности в евклидовом пространстве?” Гильбертом было показано, что в евклидовом пространстве нет поверхности, изометричной **всей** плоскости Лобачевского. Однако, часть плоскости геометрии Лобачевского может быть реализована в евклидовом пространстве.

Вопросы и задачи

§ 2

2.1. Электрический заряд находится в падающем лифте. Будет ли он излучать электромагнитные волны?

2.2. Заряд находится в невесомости в космическом корабле. Будет ли он излучать?

§ 3

3.1. Пусть в некоторой неинерциальной системе координат метрический тензор пространства Минковского имеет вид $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Показать, что существует система координат x' , в которой метрический тензор имеет тот же вид $\gamma_{\mu\nu}(x')$, и что связывающие эти системы нелинейные преобразования образуют группу.

§ 4

4.1. Верно ли утверждение: “В движущейся системе отсчета (с постоянной скоростью v) время идет медленнее, чем в неподвижной”?

4.2. Является ли лоренцево сокращение стержня (4.13) реальным или кажущимся?

4.3. Можно ли, используя эффект сокращения Лоренца, путем ускорения стержня достигнуть высокой плотности вещества?

§ 8

8.1. Электрический заряд тела не зависит от выбора системы отсчета. Исходя из этого положения найти закон преобразования плотности заряда при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

8.2. С помощью преобразований Лоренца найти поле равномерно движущегося заряда.

§ 9

9.1. Три маленьких космических ракеты A , B и C дрейфуют свободно в области пространства, удаленной от остального вещества, без вращения и без относительного движения, причем B и C равноудалены от A . По получении сигнала от A двигатели B и C запускаются и они начинают плавно ускоряться. Пусть ракеты B и C идентичны и имеют идентичные программы ускорения. Предположим, что с самого начала B и C связаны тонкой нитью. Что будет с нитью? Порвется она или нет? (Задача Дж. Белла).

9.2. Пусть установка излучает электромагнитную энергию в некотором направлении мощностью 6000 Вт. Какая сила необходима, чтобы удержать ее на месте из-за отдачи?

§ 10

10.1. Используя принцип стационарного действия получить для силы Лоренца формулу

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{\rho}{c} [\vec{v}, \vec{H}],$$

где ρ – плотность электрического заряда.

§ 11

11.1. Излучает ли заряд, движущийся в равномерно ускоренной системе отсчета по геодезической линии?

11.2. Излучает ли заряд, движущийся в произвольной неинерциальной системе отсчета по геодезической линии?

11.3. Излучает ли неподвижный заряд в неинерциальной системе отсчета?

11.4. Является ли лифт, у которого оборвался канат, инерциальной системой отсчета?

§ 12

12.1. Найти пространственную геометрию на диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω .

12.2. Пусть космонавт на космическом корабле движется с постоянным ускорением a , удаляясь от Земли. Сможет ли он в течение полета получать информацию от Центра полетов?

§ 16

16.1. Найти поверхность в геометрии Лобачевского, на которой реализуется планиметрия Евклида.

16.2. Объяснить прецессию Томаса с помощью геометрии Лобачевского.

16.3. Существует ли в геометрии Лобачевского треугольник, в котором все углы равны нулю?

16.4. Найти площадь треугольника на сфере радиуса R в геометрии Евклида.

Список литературы

1. Пуанкаре А. Настоящее и будущее математической физики. Доклад на Конгрессе искусства и науки в Сент-Луисе (сентябрь 1904 г.) // *Bulletin des Sciences Mathematiques*. December 1904. Vol. 28. Ser. 2. P. 302.
См. также: *The Monist*. January 1905. Vol. XV, № 1.
См. также: Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 27.
2. Poincaré H. Sur la dynamique de l'électron // *Comptes Rendus*. 1905. Vol. 140. P. 1504.
См. также: Принцип относительности. С. 90.
См. также: Логунов А.А. К работам Анри Пуанкаре О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА. Изд-во Моск. ун-та, 1988.
См. также: Logunov A.A. On the articles by Henri Poincaré ON THE DYNAMICS OF THE ELECTRON. Publishing Department of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna. 1995.
3. Poincaré H. Sur la dynamique de l'électron // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1906. Vol. XXI. P. 129.
См. также: Принцип относительности. С. 118.
См. также: Логунов А.А. К работам Анри Пуанкаре О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА.
4. Minkowski H. Raum und Zeit // *Phys. Zs.* 1909. B. 10. S. 104.
См. также: Принцип относительности. С. 167.
5. Логунов А.А. Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001.
См. также: Logunov A.A. The Theory of Gravity. Moscow. Nauka, 2001.
6. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.
См. также: Logunov A.A. Lectures in Relativity and Gravitation. Pergamon Press. 1990.

7. *Эйнштейн А.* Собр. научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. II. С. 405.
8. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. С. 218.
9. *Эйнштейн А.* Собр. научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I. С. 232.
10. *Эйнштейн А.* Собр. научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I. С. 269.
11. *Эйнштейн А.* Собр. научных трудов. М.: Наука, 1966. Т. II. С. 281.
12. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961. С. 245.
13. *Langevin P.* // Scientia. 1911. **10**. P. 31.
14. *Thomas L.H.* // Nature. 1926. **117**. P. 514.
15. *Сморodinский Я.А.* Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна // Эйнштейновский сборник. М.: Наука, 1972. С. 290.

Именной указатель

- Ааронов Якир (Aharonov Yakir)*,
род. 1932, 154
- Адамар Жак (Hadamard Jacques)*,
1865–1963, 239
- Адо Юрий Михайлович*, род.
1927, 4
- Айвс Герберт Е. (Ives Herbet E.)*, 1882–1953, 125,
127
- Амбарцумян Виктор Амаза-
спович*, 1908–1996,
115
- Белл Джон Стюарт (Bell John
Stewart)*, 1928–1990,
242
- Бельтрами Эудженио (Beltrami
Eugenio)*, 1835–1900,
234, 240
- Блохинцев Дмитрий Ивано-
вич*, 1908–1979, 150
- Больяи Янош (Bolyai János)*,
1802–1860, 6
- Бом Давид (Bohm David)*, 1917–
1992, 154
- Борн Макс (Born Max)*, 1882–
1970, 3, 124
- Бройль Луи де (Broglie Lui
de)*, 1892–1987, 131,
137, 139, 141
- Вейль Герман (Weyl) Hermann*,
1885–1955, 53, 105,
106
- Галилей Галилео (Galilei Ga-
lileo)*, 1564–1642, 8,
10, 11, 24–27, 41, 51,
77, 107, 111, 143
- Гамильтон Уильям Роуан (Ha-
milton William Rowan)*,
1805–1861, 19, 20
- Гаусс Карл Фридрих (Gauss
Carl Friedrich)*, 1777–
1855, 93, 205
- Герон Александрийский (He-
ron)*, I в.н.э., 233
- Герц Генрих Рудольф (Hertz
Heinrich Rudolf)*, 1857–
1894, 124, 125
- Герштейн Семен Соломоно-
вич*, род. 1929, 4
- Гильберт Давид (Hilbert Da-
vid)*, 1862–1943, 208,
210, 212, 221, 240

- Гинзбург* Виталий Лазаревич,
род. 1916, 53, 97, 131,
139, 141–143, 145, 147
- Голдберг* Стенли (*Goldberg*
Stanley), 1934–1996,
134–136
- Гук* Роберт (*Hooke Robert*),
1635–1703, 10
- Джеммер* Макс (*Jammer Max*),
род. 1915, 124
- Дирак* Поль Адриен Морис
(*Dirac Paul Adrien*
Maurice), 1902–1984,
115, 139, 140, 158
- Допплер* Кристиан Адreas
(*Doppler Christian*
Adreas), 1803–1853,
114
- Евклид* (*Euclid*), род. 325 до
н.э., 5–7, 128, 233, 243
- Ефимов* Николай Владими-
рович, 1910–1982, 229
- Зельдович* Яков Борисович,
1914–1987, 147
- Зоммерфельд* Арнольд Ио-
ганн Вильгельм, 1868–
1951, 66, 180
- Иваненко* Дмитрий Дмитри-
евич, 1904–1994, 115,
150
- Кан* Вильям (*Cahn William*),
1912–1976, 125
- Киллинг* Вильгельм Карл Йо-
зеф, (*Killing Wilhelm*
Karl Joseph), 1847–
1923, 215–217
- Коперник* Николай (*Coperni-
cus Nicholas*), 1473–
1543, 53
- Кристоффель* Эльвин Бру-
но (*Christoffel Elwin*
Bruno), 1829–1900,
162, 174
- Кронекер* Леопольд (*Krone-
cker Leopold*), 1823–
1891, 81, 195
- Лагранж* Жозеф Луи (*La-
grange Joseph Louis*),
1736–1813, 13, 15, 17,
19, 152, 154, 203, 204,
206, 207
- Ламберт* Иоганн Генрих
(*Lambert Johann Hein-
rich*), 1728–1777, 233
- Ланжевэн* Поль (*Langevin*
Paul), 1872–1946, 128,
146, 149, 150, 179
- Лармор* Джозеф (*Larmor Jo-
seph*), 1857–1942, 40,
146, 156
- Лебедев* Петр Николаевич,
1866–1912, 112
- Леви-Чивита* Туллио (*Levi-
Civita Tullio*), 1873–
1941, 93

- Ли* Мариус Софус (*Lie Marius Sophus*), 1842–1899, 84, 207–209
- Лобачевский* Николай Иванович, 1793–1856, 6, 78, 222, 223, 225, 227, 229–231, 233, 234, 236, 239, 240, 243
- Лоренц* Гендрик Антон (*Lorentz Hendrik Anton*), 1853–1928, 3, 4, 23, 24, 26–28, 31–35, 37–41, 43, 45, 46, 48–58, 62, 65–67, 69, 70, 72–75, 77, 78, 83–88, 91, 92, 96–98, 100, 102, 104–107, 113, 116, 132–135, 137–144, 146, 147, 149, 150, 152–154, 156, 158, 166, 188, 199, 203, 214, 241, 242
- Лоренц* Людвиг Валентин (*Lorentz Ludwig Valentin*), 1829–1891, 87
- Льенар* Альфред-Мари (*Liénard Alfred-Marie*), 1869–1958, 157
- Майкельсон* Альберт Абрахам (*Michelson Albert Abraham*), 1852–1931, 24, 39, 179, 180
- Максвелл* Джеймс Клерк (*Maxwell James Clerk*), 1831–1879, 22, 23, 28, 33, 34, 40, 45, 46, 48, 50, 57, 86, 90, 91, 94, 96, 102, 105, 119, 125, 132, 133, 138, 152–154, 166, 188, 203
- Мандельштам* Леонид Исаакович, 1879–1944, 52, 53, 64
- Матвеев* Виктор Анатольевич, род. 1941, 151
- Мах* Эрнст (*Mach Ernst*), 1838–1916, 11, 12
- Минковский* Герман (*Minkowski Hermann*), 1864–1909, 3, 4, 29, 46, 47, 58, 59, 61, 63, 65, 66, 79, 81, 90, 106, 111, 136, 150, 162, 165, 167, 188, 189, 191, 194, 195, 214, 216, 217, 241
- Ньютон* Исаак (*Newton Isaac*), 1643–1727, 6, 7, 9–13, 108
- Пайс* Абрахам (*Pais Abraham*), 1918–2000, 131–133, 136, 145, 146
- Паули* Вольфганг (*Pauli Wolfgang*), 1900–1958, 3, 69, 136, 139–141, 145
- Петров* Владимир Алексеевич, род. 1947, 4, 35, 116

- Пифагор* Самосский (*Pythagoras*), род. 570 до н.э., 5
- Планк* Макс Карл Эрнст Людвиг (*Planck* Max Karl Ernst Ludwig), 1858–1947, 113, 121, 128, 147
- Пойнтинг* Джон Генри (*Poynting* John Henry), 1852–1914, 93–96, 119–121
- Понсо* М. (*Ponsot* M.), 146
- Понтягин* Лев Семенович, 1908–1988, 151
- Пуанкаре* Анри (*Poincaré* Henri), 1854–1912, 3, 4, 8, 22–35, 37, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 52–54, 57–59, 65–67, 72, 83, 84, 88, 89, 92, 97, 99, 100, 102, 104–106, 109, 110, 115, 116, 121, 123, 124, 127, 131–151, 189, 196, 214, 222, 240
- Пуассон* Симеон Дени (*Poisson* Simeon Denis), 1781–1840, 20, 21
- Рейхенбах* Ганс (*Reichenbach* Hans), 1891–1953, 192
- Риман* Георг Фридрих Бернхард (*Riemann* Georg Friedrich Bernhard), 1826–1866, 6, 65, 160
- Рыбаков* Юрий Петрович, род. 1939, 159
- Самохин* Анатолий Петрович, род. 1950, 4
- Саньяк* Жорж Марк Мари (*Sagnac* Georges Marc Marie), 1869–1928, 4, 58, 179–181, 183, 185
- Сморodinский* Яков Абрамович, 1917–1992, 225
- Тамм* Игорь Евгеньевич, 1895–1971, 94
- Тейлор* Брук (*Taylor* Brook), 1685–1731, 207, 209
- Терлецкий* Яков Петрович, 1912–1993, 159
- Томас* Левелин Хиллет (*Thomas Llewellyn Hilleth*), 1903–1992, 4, 58, 77, 202, 243
- Тюрин* Николай Евгеньевич, род. 1945, 4
- Тяпкин* Алексей Алексеевич, 1926–2003, 33, 150, 194
- Уиттекер* Эдмунд Тейлор (*Whittaker* Edmund Taylor), 1873–1956, 67
- Умов* Николай Алексеевич, 1846–1915, 94
- Фарадей* Майкл (*Faraday* Michael), 1791–1867, 22

- Фейнман Ричард Филлипс (*Feynman Richard Phillips*), 1918–1988, 140
- Ферми Энрико (*Fermi Enrico*), 1901–1954, 115
- Фогт Вольдемар (*Voigt Woldemar*), 1850–1919, 29
- Фок Владимир Александрович, 1898–1974, 77, 167
- Фредерикс Всеволод Константинович, 1885–1944, 150
- Холтон Джеральд (*Holton Gerald*), род. 1922, 149
- Хофман Банеш (*Hoffmann Banesh*), род. 1906, 104, 148
- Цангер Генрих (*Zangger Heinrich*), 1874–1957, 104
- Черников Николай Александрович, род. 1928, 229
- Чугреев Юрий Викторович, род. 1960, 179
- Штарк Йоханнес (*Stark Johannes*), 1874–1957, 113
- Эйлер Леонард (*Euler Leonhard*), 1707–1783, 17, 205
- Эйнштейн Альберт (*Einstein Albert*), 1879–1955, 3, 23, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 38, 40, 41, 48, 50, 52–57, 59–67, 69, 77, 91, 92, 97, 104–106, 110–113, 124–127, 131–134, 136–140, 145–150, 170, 190
- Якоби Карл Густав Якоб (*Jacobi Carl Gustav Jacob*), 1804–1851, 21

Предметный указатель

- А**
 абберрация света, 114, 226, 227
 абсолютное время, 7, 23, 135
 абсолютное движение, 11, 26, 27, 43
 абсолютное пространство, 7, 11, 12, 134
 античастицы, 115
- Б**
 Бельтрами координаты, 234
- В**
 вектор спина, 198, 199, 202
 вектор-потенциал, 154
 волновое уравнение, 27, 28, 43, 45, 48, 113
 Вселенная, 8, 47, 131, 229
- Г**
 галилеевы (декартовы) координаты, 4, 43, 46, 47, 49, 50, 58, 74, 107, 114, 130, 133, 167, 169, 179, 186, 191, 195–197, 213, 216, 221
 Галилея преобразования, 24, 26, 27, 51, 107, 111, 143
 Гамильтона уравнения, 19, 20
 гамильтониан, 18, 19
 Гаусса теорема, 205
 геодезическая линия, 130, 162, 174, 179, 234–238, 242
 Герона формула, 233
 Гильберта плотность тензора энергии-импульса, 210, 214, 215, 221
 гравитационные волны, 49, 137, 138
 группа, 31, 45, 46, 48, 49, 54, 57, 66, 77, 82–85, 91, 103–105, 112, 134, 138, 143, 149, 150, 156, 203, 214, 241
 Гука закон, 10
- Д**
 дефект массы, 128
 Дирака-Лоренца уравнение, 158

- дифференциальные законы
сохранения, 206
- Е**
евклидова геометрия, 5, 6, 23,
233
- З**
закон сохранения тока, 86,
154
- И**
инварианты электромагнит-
ного поля, 92
инертная масса, 124
инерциальные системы от-
счета, 4, 11, 13, 26,
28, 31, 40, 43, 45, 47–
49, 51, 54, 58–60, 62,
68–74, 77, 88, 92, 97,
99, 111, 114, 129–131,
135, 137, 142–144, 148,
162, 169–173, 176, 178,
181, 186, 191, 193–
197, 199, 202, 225, 241,
242
интегральные законы сохра-
нения, 214
интервал, 47, 58, 60–62, 65,
68–71, 73, 107, 150,
160, 169, 170, 172, 173,
179, 181, 183–187, 193–
195
- К**
Киллинга вектор, 216, 217
Киллинга уравнение, 215
ковариантная производная,
163–167, 208, 209
ковариантный вектор, 80,
89, 164, 198
ковариантный тензор, 80,
164
контравариантный вектор,
80, 87, 88, 164, 165
контравариантный тензор,
80
координатная скорость све-
та, 36, 37, 197
координатное время, 184,
194, 197
координатные величины,
191, 193–197
Кристоффеля символ, 162,
174
Кронекера символ, 81, 195
- Л**
Лагранжа метод, 21, 206
Лагранжа плотность функ-
ции, 15, 17, 152, 154,
203, 204, 207
Лагранжа уравнения, 15, 17,
19, 152
лагранжиан, 204, 206, 217
Лармора формула, 156
Леви-Чивита тензор, 93

- Ли вариация, 207–209
- Лобачевского геометрия, 6,
222, 223, 229, 230, 233,
234, 236, 239, 240, 243
- Лобачевского пространство,
78, 225, 227
- Лобачевского формула, 230
- Лоренца группа, 46, 48, 49,
54, 57, 66, 77, 84, 85,
102, 104, 105, 134, 138,
149, 150, 156, 203, 214
- Лоренца преобразования, 4,
29, 32, 37–40, 43, 45,
46, 48–52, 56–58, 62,
65, 69, 70, 73–75, 77,
78, 83–85, 87, 88, 91,
92, 96–98, 100, 102,
104, 107, 113, 133, 135,
137–140, 142–144, 146,
199, 241
- Лоренца сила, 57, 96, 98, 100,
154, 158
- Лоренца сокращение, 4, 58,
72, 73, 132, 133, 241
- лоренц-инвариантность, 54,
137, 138
- Лоренца Л. условие, 87
- М**
- Максвелла-Лоренца уравне-
ния, 23, 28, 33, 34,
45, 46, 48, 50, 57, 86,
91, 96, 102, 105, 132,
133, 138, 152–154,
166, 188, 203
- местное время, 27, 28, 31, 33,
35, 37, 38, 41–43, 48,
52, 54, 55, 137, 189
- метрический тензор прост-
ранства, 61–63, 65,
81, 165, 188, 190, 203,
204, 209, 214, 219,
220, 241
- Минковского пространство,
46, 47, 59, 79, 81, 106,
111, 162, 165, 167, 188,
189, 191, 194, 195, 214,
216, 217, 241
- Н**
- неинерциальные системы ко-
ординат, 4, 58, 61, 62,
130, 170, 174, 176, 178,
181, 184, 187, 195–
197, 241, 242
- Ньютона законы механики,
6, 7, 9, 11, 13
- Ньютона сила тяготения, 10
- О**
- обобщенные координаты, 13,
15
- обобщенный импульс, 18
- одновременность, 3, 33, 34,
38, 48, 52–54, 71, 137,
188, 191, 193–196

П

- “парадокс часов”, 4, 58, 170,
171, 178
- Пифагора теорема, 5
- плотность канонического
тензора энергии-им-
пульса, 211, 221
- плотность лагранжиана, 154,
204, 218–221
- плотность тензора спина, 211,
221
- Пойнтинга вектор, 93, 96, 119
- Пойнтинга уравнение, 93–96,
120
- Пуанкаре группа, 65
- Пуанкаре уравнения механи-
ки, 54, 57, 107–109,
115, 124, 137, 138, 165,
202
- Пуассона скобки, 20, 21
- потенциал, 45, 46, 86–88, 92,
153, 154
- принцип относительности, 3,
4, 10, 24–28, 30, 31,
33, 34, 39–42, 45, 46,
48, 49, 51–54, 57–59,
62, 68, 69, 72, 77, 88,
96, 97, 107, 112, 126,
132–135, 137, 138,
141–144, 147, 148,
150, 167, 189, 196

- принцип постоянства скоро-
сти света, 3, 4, 40, 41,
52, 58, 132, 133, 135,
196
- псевдоевклидова геометрия
пространства-вре-
мени, 4, 23, 47, 48,
52, 57–60, 62, 63, 65,
71, 72, 137, 138, 170,
179, 186, 190, 195,
202, 208, 214, 216,
217, 222, 225, 230

Р

- Римана тензор кривизны, 65,
160
- риманова геометрия, 6, 63,
82

С

- силы гравитации, 162
- силы инерции, 162
- силы реакции, 158, 162
- синхронизация часов, 33,
37, 48, 52, 54, 188,
191, 193, 196, 197
- сложение скоростей, 78, 89,
180
- собственное время, 169, 171,
176, 177, 183, 185,
190, 198

Т

теорема косинусов, 223, 225,
226, 230, 233
теорема синусов, 223–225, 238
ток смещения, 23, 86

У

уравнения релятивистской ме-
ханики, 54, 57, 109,
115, 124, 137, 138, 147,
165, 202
уравнения сохранения заря-
да, 23, 87

Ф

физический вакуум, 26, 115
физическое время, 28, 68, 69,
187, 193–195
фундаментальные законы со-
хранения, 4, 59, 60,
105, 111, 221

Ч

четырехвектор, 88, 99–101,
107, 108, 114, 128, 129,
152, 157, 162, 198, 199,
206

четырехимпульс, 112, 113,
134

четырёхмерное простран-
ство-время, 6, 30, 43,
58–61, 63, 79, 102,
105–107, 112, 204

четырёхсила, 46, 100, 108,
128, 134

четырёхскорость, 46, 99, 108,
114, 129

Э

Эйлера вариационная произ-
водная, 17, 205

электродинамическая посто-
янная, 43, 188, 196

электромагнитные волны, 23,
241

энергия связи, 128

эфир, 26, 29, 33, 34, 141, 143,
144, 148

Я

якобиан, 79, 207

Содержание

Предисловие	3
§ 1. Геометрия Евклида	5
§ 2. Классическая механика Ньютона	7
§ 3. Электродинамика. Геометрия пространства-времени	22
§ 4. Относительность времени и сокращение длины	68
§ 5. Сложение скоростей	78
§ 6. Элементы векторного и тензорного анализа в про- странстве Минковского	79
§ 7. Группа Лоренца	83
§ 8. Инвариантность уравнений Максвелла-Лоренца	86
§ 9. Релятивистская механика Пуанкаре	107
§ 10. Принцип стационарного действия в электродина- мике	152
§ 11. Движение пробного тела по инерции. Ковариант- ное дифференцирование	160
§ 12. Релятивистски равноускоренное движение. Пара- докс часов. Эффект Саньяка	168
§ 13. О предельной скорости	186
§ 14. Прецессия Томаса	198
§ 15. Уравнения движения и законы сохранения класси- ческой теории поля	203
§ 16. Пространство скоростей Лобачевского	222
Вопросы и задачи	241
Список литературы	244
Именной указатель	246
Предметный указатель	251